TS

Équations différentielles (1)

I. Introduction : relation liant une fonction et sa dérivée

1°) Exemple 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto \mathrm{e}^x$

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) \left(= \mathrm{e}^x\right)$.

On dit que *f* vérifie l'équation différentielle $y' = y$.

(différentiel < dérivée)

2°) Exemple 2

a réel fixé

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\quad x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = k \times a\mathrm{e}^{ax}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a \times f(x)$

On dit que *f* vérifie l'équation différentielle $y' = ay$.

II. Vocabulaire

1°) Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I (souvent notée *y*) donnée sous la forme d'une égalité liant cette fonction et sa dérivée.

2°) Exemple

$$y' - \frac{3}{2}y = 0$$

Résoudre (ou intégrer) cette équation différentielle signifie déterminer toutes les fonctions *f* définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - \frac{3}{2}f(x) = 0$.

$f :\ x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$ est une solution particulière.

3°) Cas simples

- $y' = 3$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

- $y' = 0$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R})$.

- $y' = 2x + 3$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + k$ $(k \in \mathbb{R})$.

III. Solutions particulières

1°) Exemple 1

$y' - 2y = 7 - 2x^2 \quad$ (E)

Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 3$ est une solution particulière de (E).

La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x + 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - 2f(x) = 2x + 1 - 2x^2 - 2x + 6$$
$$= 7 - 2x^2$$

Donc la fonction *f* est une solution particulière de (E).

2°) Exemple 2

$y' + y = x + 1 \quad$ (E)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$.

La fonction *f* est-elle une solution particulière de (E) ?

La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction affine).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2$

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) = 2 + 2x - 1$
$$= 1 + 2x$$

Donc la fonction *f* n'est pas solution particulière de (E).

(En effet, deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si elles ont le même degré et les monômes de même degré sont égaux).

IV. Équations différentielles de la forme $y' = ay$ (a : réel fixé)

1°) Théorème fondamental

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$.

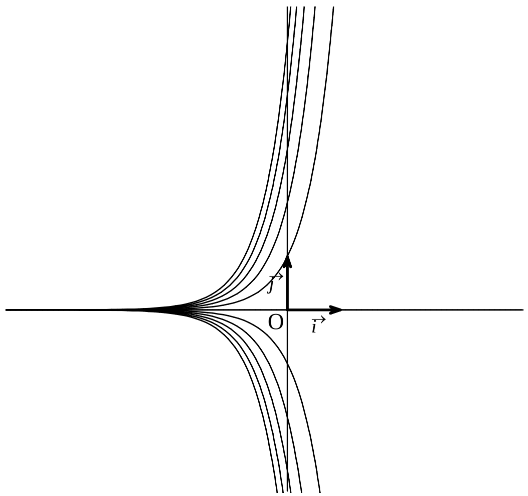
2°) Exercice

Résoudre (intégrer) l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ (E).

Rédaction-type :

(E) s'écrit $y' = 2y$.
On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = 2$.
D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

On obtient un réseau de courbes intégrales.



3°) Démonstration (ROC)

$y' = ay$ (E)

On va faire dans les deux sens.

1er sens : H$_1$ f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$

C$_1$ Vérifions que f est solution de (E).

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = k \times a\mathrm{e}^{ax}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = a \times f(x)$

2^{e} sens : H$_2$ On suppose que f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f est solution de (E).

C$_2$ Démontrons que $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Astuce de départ : considérons la fonction g définie par $g(x) = f(x) \times \mathrm{e}^{-ax}$.

On va démontrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = f'(x) \times \mathrm{e}^{-ax} + f(x) \times \left(-a\mathrm{e}^{-ax}\right)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = \mathrm{e}^{-ax} \times \left(f'(x) - af(x)\right)$

Or d'après H$_2$, f est solution de (E).

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = af(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) - af(x) = 0$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = 0$.

Par conséquent, g est constante sur $\mathbb{R}$.

Il existe donc un réel k tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = k$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \times \mathrm{e}^{-ax} = k$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{k}{\mathrm{e}^{-ax}}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$

4°) Solution prenant une valeur donnée

• Propriété

Pour tout couple $(x_0\,;\,y_0)$ de réels, il existe une unique fonction *f* solution de l'équation différentielle $y'=ay$ telle que $f(x_0)=y_0$.

• Interprétation graphique

Il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$.

• Démonstration

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\,\mathrm{e}^{ax}$ $(k\in\mathbb{R})$.

$$f(x_0)=y_0 \Leftrightarrow k\times\mathrm{e}^{ax_0}=y_0$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{y_0}{\mathrm{e}^{ax_0}}$$
$$\Leftrightarrow k=y_0\mathrm{e}^{-ax_0}$$

Il existe une unique fonction f solution de (E) telle que $f(x_0)=y_0$.
L'expression de *f* est $f(x)=\left(y_0\mathrm{e}^{-ax_0}\right)\times\mathrm{e}^{ax}=y_0\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$.

N.B. : Cette règle correspond aux « conditions initiales » en physique ($t=0$).

V. Les équations différentielles en physique

1°) Écriture

$y'=ay$ s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ay$ (notation différentielle de LEIBNIZ)

2°) Exemple en radioactivité

N : nombre d'atomes qui restent

N dépend du temps t.

On admet que cette fonction $t\mapsto N(t)$ est dérivable.

On établit l'équation différentielle :

$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda N$ (λ est la constante de radioactivité exprimée en s^{-1} si t est exprimé en s ainsi que le montre une analyse dimensionnelle)

dérivée de N par rapport à t

(macroscopique : $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=-\lambda N$

microscopique : $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda N$)

$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda N$ est la loi de décroissance radioactive.

Mathématiquement : $N'(t)=-\lambda N(t)$
$N'=-\lambda N$

Les solutions de l'équation différentielle $y'=-\lambda y$ sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=k\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ $(k\in\mathbb{R})$.
Donc, comme N vérifie cette équation différentielle, $N(t)=k\mathrm{e}^{-\lambda t}$ $(k\in\mathbb{R})$.

On note N_0 le nombre d'atomes à l'instant $t=0$.

$N(0)=N_0$

On a donc $k\times\mathrm{e}^{-\lambda\times 0}=N_0$ donc $k\times 1=N_0$ d'où $k=N_0$

On obtient $\boxed{N(t)=N_0\times\mathrm{e}^{-\lambda t}}$ (loi de décroissance radioactive)

Temps de demi-vie

Temps $t_{1/2}$ au bout duquel il reste la moitié du nombre d'atomes initial

Calculons $t_{1/2}$

$$N(t)=\frac{N_0}{2} \Leftrightarrow \cancel{N_0}\times\mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{\cancel{N_0}}{2} \qquad (N_0>0)$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow -\lambda t=-\ln 2$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$