Formules sommatoires d'expressions trigonométriques

θ désigne une réel fixé qui n'est pas de la forme $2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$.
n est un entier naturel fixé.

On pose $\mathrm{C} = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{C} + \mathrm{iS}$.

$$\mathrm{Z} = \mathrm{C} + \mathrm{iS}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\cos(k\theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{k}$$

$$= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1} \quad (\text{car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1)$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\theta}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)\theta}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)} \quad (\text{astuce : argument moitié})$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}} 2\mathrm{i}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}} \sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$C = \operatorname{Re} Z = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \times \sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$S = \operatorname{Im} Z = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \times \sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Formules utilisées :

• **Formule de la somme des puissances consécutives d'un nombre différent de 1** (à relier avec la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad (q \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$$

• **Formules d'Euler**

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$$