TS1

Contrôle du mardi 17 mars 2015 (50 minutes)

Prénom : …………………………………………….……….. **Nom :** …………………

Note : …. / 20

I. (8 points) QCM

Cet exercice est un QCM composé de 4 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-dessous avec les lettres A, B, C, D correspondant aux réponses choisies. Aucune justification n'est attendue.
Chaque réponse exacte rapporte 2 points. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) a est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

a^2 est égal à :

A : -2 B : $-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$ C : $\sqrt{2}$ D : $-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$

2°) On pose $z_1=\sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Une forme exponentielle de $\mathrm{i}\frac{z_1}{z_2}$ est :

A : $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ B : $\sqrt{12}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ C : $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ D : $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

3°) Soit z le nombre complexe de forme exponentielle $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r et θ sont deux réels tels que $r>0$.

Un argument de $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{z}$ est :

A : $-\frac{\pi}{3}-\theta$ B : $\frac{2\pi}{3}-\theta$ C : $\frac{2\pi}{3}+\theta$ D : $\frac{5\pi}{6}-\theta$

4°) Un argument du nombre complexe $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^9$ est :

A : 0 B : $\frac{3\pi}{2}$ C : $\frac{\pi}{2}$ D : $-\frac{\pi}{6}$

Question	1°	2°	3°	4°	**Total**
Réponse					

Dans les exercices **II**, **III** et **IV**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

II. (5 points)

Soit A, B, C les points d'affixes respectives $a=\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $b=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

1°) Calculer $Z=\frac{c-b}{a-b}$ en donnant le résultat sous forme algébrique. On détaillera uniquement les grandes étapes du calcul.

………

………

………

………

2°) Déduire du 1°) la nature précise du triangle ABC.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (4 points)

Pour tout nombre complexe z non nul, on pose $z' = \ln|z| \times z$.

On suppose que $|z| \neq 1$. On note r le module de z et θ un argument de z.

Donner une écriture exponentielle de z' en expliquant toute la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (2 points)

On note f l'application du plan *P* dans lui-même qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1 + z^2$. Le point M' est appelé l'image de M par *f*.

Déterminer l'ensemble *E* des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{-2x} + 1$.

Calculer $f'(x)$. Donner le résultat sous forme factorisée.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 17-3-2015

I. QCM

Cet exercice est un QCM composé de 4 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-dessous les lettres A, B, C, D correspondant aux réponses choisies. Aucune justification n'est attendue.
Chaque réponse exacte rapporte 2 points. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) a est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

a^2 est égal à :

A : -2 B : $-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$ C : $\sqrt{2}$ D : $-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$

2°) On pose $z_1=\sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Une forme exponentielle de $\mathrm{i}\frac{z_1}{z_2}$ est :

A : $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ B : $\sqrt{12}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ C : $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ D : $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

3°) Soit z le nombre complexe de forme exponentielle $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r et θ sont deux réels tels que $r>0$.

Un argument de $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{z}$ est :

A : $-\frac{\pi}{3}-\theta$ B : $\frac{2\pi}{3}-\theta$ C : $\frac{2\pi}{3}+\theta$ D : $\frac{5\pi}{6}-\theta$

4°) Un argument du nombre complexe $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^9$ est :

A : 0 B : $\frac{3\pi}{2}$ C : $\frac{\pi}{2}$ D : $-\frac{\pi}{6}$

Question	1°	2°	3°	4°	Total
Réponse	D	D	B	C	

Quelques indications permettant de trouver les réponses :

1°)

$a=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ donc $a^2=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

On peut aussi écrire tout de suite $a=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ donc

$a^2=\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2=1-3+2\mathrm{i}\sqrt{3}=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$

2°)

$\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

3°)

$-1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ donc $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{z}=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{2}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}$

4°)

$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^9&=2^9\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{9\pi}{6}}\\&=2^9\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\\&=2^9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\quad\left(\text{car } -\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-2\pi\right)\end{aligned}$$

Dans les exercices **II**, **III** et **IV**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

II.

Soit A, B, C les points d'affixes respectives $a=\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $b=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

1°) Calculer $Z=\frac{c-b}{a-b}$. On détaillera uniquement les grandes étapes du calcul.

$Z=\dfrac{c-b}{a-b}$

$=\dfrac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}+1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}-\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+1+\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{\left[1-\sqrt{3}-\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)\right]\left[\sqrt{3}+1-\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)\right]}{\left[\sqrt{3}+1+\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)\right]\left[\sqrt{3}+1-\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)\right]}$

$=\dfrac{\left[1-\sqrt{3}-\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)\right]\left[\sqrt{3}+1-\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)\right]}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$

$=\dfrac{\left[1-\sqrt{3}-\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)\right]\left[\sqrt{3}+1-\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)\right]}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$

$=\dfrac{\cancel{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}-\cancel{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}-\mathrm{i}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)\right]}{8}$

$=\dfrac{-8\mathrm{i}}{8}$

$=-\mathrm{i}$

On pouvait vérifier le calcul à l'aide de la calculatrice.

Afin d'éviter un « gros » calcul, j'aurais pu demander de démontrer que $c-b=-\mathrm{i}\left(a-b\right)$ (version plus simple).

2°) Déduire du 1°) la nature précise du triangle ABC.

$-\mathrm{i}=0+\mathrm{i}\times(-1)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ (on peut mettre $-\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$)

$Z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

On aurait aussi pu utiliser une calculatrice en mode complexe.

Module de Z :

D'une part, $|Z|=\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right|=1$ (car $\forall\theta\in\mathbb{R}\quad\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|=1$)

D'autre part, $|Z|=\left|\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}\right|=\dfrac{|z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}|}{|z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}|}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}$

Donc $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}=1$ d'où $\mathrm{BC}=\mathrm{BA}$.

On en déduit que le triangle ABC est isocèle en B.

Argument de Z :

D'une part, $\arg Z=\arg\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ donc $\arg Z=\arg\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

D'autre part, $\arg Z=\arg\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}$ donc $\arg Z=\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$ (2π).

Donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

On en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

Conclusion :

Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

III.

Pour tout nombre complexe z, on pose $z'=\ln|z|\times z$.

On suppose que $|z|\neq 1$. On note r le module de z et θ un argument de z.

Donner une écriture exponentielle de z' en expliquant toute la démarche.

$z'=\ln r\times r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r\ln r\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

On a une forme du « type exponentiel ».
On doit discuter suivant le signe de $r\ln r$.
Comme $r>0$, le signe de $r\ln r$ dépend de celui de $\ln r$.

1$^{\text{er}}$ cas : $r>1$

Dans ce cas, $\ln r>0$.

On a : $z'=r\ln r\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Cette égalité donne bien une écriture exponentielle de z' car $r\ln r>0$.

2$^{\text{e}}$ cas : $0<r<1$

Dans ce cas, $\ln r<0$.

On utilise $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

On écrit alors $z'=-r\ln r\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$.
Cette égalité donne bien une écriture exponentielle de z' car $-r\ln r>0$.

IV.

On note f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1 + z^2$. Le point M' est appelé l'image de M par *f*.

Déterminer l'ensemble *E* des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

Soit M un point quelconque de cercle $\mathcal{C}$ d'affixe z.

Il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$ (d'après le cours sur les équations paramétriques de cercles).

On a alors $z' = 1 + e^{2i\theta}$ (1).

Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, M décrit $\mathcal{C}$ et 2θ décrit également $\mathbb{R}$.

D'après (1), M' décrit le cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon 1.

On en déduit que l'ensemble *E* des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon 1.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{-2x} + 1$.

Calculer $f'(x)$. Donner le résultat sous forme factorisée.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= 1 \times e^{-2x} + (x-1)\left(-2e^{-2x}\right) \\ &= (3-2x)e^{-2x} \end{aligned}$$