1$^{\text{ère}}$ S1

Test du lundi 16 mars 2015 (15 min)

Prénom : ………………………………… **Nom :** …………………………………

Note : …. / 20

Dans les exercices **I** et **II**, une unité de longueur est fixée dans le plan.

I. (10 points)

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;1]$.
On note E et F les points appartenant respectivement aux segments [BC] et [CD] tels que $\text{BE}=\text{DF}=x$.
Le but de l'exercice est d'exprimer le produit scalaire $p=\overrightarrow{\text{AE}}\cdot\overrightarrow{\text{AF}}$ en fonction de x.

1°) Compléter les deux lignes suivantes en suivant les consignes suivantes.

1$^{\text{ère}}$ ligne : écrire p en remplaçant une décomposition de chaque vecteur à l'aide de la relation de Chasles ; on utilisera le point B pour le premier vecteur et le point D pour le deuxième vecteur.

2$^{\text{e}}$ ligne : écrire p sous la forme d'une somme de 4 produits scalaires, sans parenthèses.

$p=$ ……………………………………………………………………………

$p=$ ……………………………………………………………………………

2°) Achever le calcul de p. On rédigera les explications utiles.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (10 points : 5 points + 5 points)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5$.

Calculer $\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)^2$ et $\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$.

On commencera par déterminer une expression développée la plus simple possible avant de passer à l'application numérique.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du test du 16-3-2015

Quelques remarques générales sur le produit scalaire :

1) Respecter la notation du produit scalaire : $\bullet$.
Le symbole $\times$ s'utilise juste entre des distances.

2) On dit que deux vecteurs sont orthogonaux et non perpendiculaires.

3) Ne pas utiliser de pronom : « $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = 0$ car ils sont orthogonaux ».

I.

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;1]$.
On note E et F les points appartenant respectivement aux segments [BC] et [CD] tels que $BE = DF = x$.
Le but de l'exercice est d'exprimer le produit scalaire $p = \overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AF}$ en fonction de x.

1°) Compléter les deux lignes suivantes en suivant les consignes suivantes.

1ère ligne : écrire p en remplaçant une décomposition de chaque vecteur à l'aide de la relation de Chasles ; on utilisera le point B pour le premier vecteur et le point D pour le deuxième vecteur.

2e ligne : écrire p sous la forme d'une somme de 4 produits scalaires, sans parenthèses.

$$p = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}\right)$$

$$p = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{DF}$$

2°) Achever le calcul de p. On rédigera les explications utiles.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 0$

$\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{DF} = 0$

Donc $p = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{AD}$.

D'où $p = AB \times DF + BE \times AD$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF}$, d'une part, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AD}$, d'autre part, sont colinéaires de même sens.

$$p = 1 \times x + x \times 1$$

$$p = 2x$$

II.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \bullet \vec{v} = -5$.

Calculer $\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right)^2$ et $\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} + \vec{v}\right)$.

On commencera par déterminer une expression développée la plus simple possible avant de passer à l'application numérique.

$$\begin{aligned}
\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right)^2 &= \vec{u}^2 - 4\vec{u} \bullet \vec{v} + 4\vec{v}^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 - 4\vec{u} \bullet \vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 \\
&= 9 - 4 \times (-5) + 4 \times 16 \\
&= 93
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} + \vec{v}\right) &= \vec{u}^2 + \vec{u} \bullet \vec{v} - 2\vec{u} \bullet \vec{v} - 2\vec{v}^2 \\
&= \vec{u}^2 - \vec{u} \bullet \vec{v} - 2\vec{v}^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \bullet \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2 \\
&= 9 + 5 - 2 \times 16 \\
&= -18
\end{aligned}$$