TS spécialité

Contrôle du mardi 10 mars 2015 (50 min)

Prénom : …………………………………… **Nom :** ……………………………………

/20

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

1°) **Question de cours**

Soit p un nombre premier. Soit a et b deux entiers relatifs.
Compléter l'équivalence suivante :

$$p \mid ab \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2°) Le but de cette question est de déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que
$x^2 = 29y + 1 \quad (\mathrm{E})$.
On suppose que le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (E). Démontrer qu'alors $x^2 - 1$ est divisible par 29.
En déduire les valeurs possibles de x et conclure.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (4 points)

Soit a et b deux entiers naturels tels que $p = 2a + 3b$ soit un nombre premier.
Démontrer que a et b sont premiers entre eux.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (5 points : 3 points + 2 points)

Soit a et b deux entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a+b\,;ab)=p$ où p est un nombre premier.

1°) Démontrer que p divise a^2. En déduire que p divise a.
On démontrerait de même que p divise b. On ne refera pas la démonstration.

2°) En déduire $\text{PGCD}(a\,;b)$. Justifier avec soin.

IV. (6 points : 3 points + 1 point + 2 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 49\times 10^n$. On rédigera les réponses de manière claire et concise.

1°) Déterminer le reste de la division euclidienne de a_n par 11 suivant les valeurs de n.

2°) Déterminer le reste de la division euclidienne de ${a_n}^2$ par 11.

3°) Exprimer en fonction de n le nombre de diviseurs positifs de ${a_n}^2$. Expliquer brièvement.

Corrigé du contrôle du 10-3-2015

I.

1°)

$$p \mid ab \Leftrightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b$$

2°) Déterminons tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que : $x^2 = 29y + 1$ (E).

Il s'agit d'une équation diophantienne à deux inconnues.

Supposons que $(x\,;\,y)$ est un couple d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).

On a alors $x^2 - 1 = 29y$ (1) (égalité que l'on peut aussi écrire $x^2 - 1 = 29 \times y$).

Comme $y \in \mathbb{Z}$, l'égalité (1) permet d'affirmer que $29 \mid x^2 - 1$ ce qui est équivalent à $29 \mid (x-1)(x+1)$.

Or 29 est un nombre premier donc d'après la propriété rappelée dans la question 1°), $29 \mid x+1$ ou $29 \mid x-1$.

• 1$^{\text{er}}$ cas : $29 \mid x+1$

Dans ce cas $x = 29k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On reprend alors l'égalité (1) et on remplace x par $29k - 1$.

On obtient l'égalité $(29k-1)^2 - 1 = 29y$ $(1')$.

$(1') \Leftrightarrow (29k)^2 - 2 \times 29k + 1 - 1 = 29y$

$\Leftrightarrow 29^2 \times k^2 - 2 \times 29k = 29y$

$\Leftrightarrow 29 \times k^2 - 2k = y$

Réciproquement, on vérifie que le couple $(29k-1\,;\,29k^2 - 2k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est solution de (E).

Si l'on considère un tel couple, on a :

$x^2 = (29k-1)^2 = 29^2k^2 - 2 \times 29k + 1 = (29k-1)^2$

$29(29k^2 - 2k) + 1 = 29^2k^2 - 2 \times 29k + 1 = (29k-1)^2$

Le couple $(29k-1\,;\,29k^2 - 2k)$ est donc bien solution de (E).

• 2$^{\text{e}}$ cas : $29 \mid x-1$

Dans ce cas, $x = 29k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

On reprend alors l'égalité (1) et on remplace x par $29k' + 1$.

On obtient l'égalité $(29k'+1)^2 - 1 = 29y$ $(1'')$.

$(1'') \Leftrightarrow (29k')^2 + 2 \times 29k' + 1 - 1 = 29y$

$\Leftrightarrow 29^2 \times k'^2 + 2 \times 29k' = 29y$

$\Leftrightarrow 29 \times k'^2 + 2k' = y$

Réciproquement, on vérifie que le couple $(29k'+1\,;\,29k'^2 + 2k')$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ est solution de (E).

Conclusion :

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$$S = \{(29k-1\,;\,29k^2 - 2k),\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(29k'+1\,;\,29k'^2 + 2k'),\, k' \in \mathbb{Z}\}$$

II.

Démontrons que a et b sont premiers entre eux.

Soit d un diviseur positif commun à a et b.

On a alors $d \mid a$ et $d \mid b$.

Donc d divise toute combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers.

On en déduit en particulier que $d \mid 2a + 3b$ soit $d \mid p$.

Or p est un nombre premier donc $d = 1$ ou $d = p$.

1$^{\text{er}}$ cas : $a = 0$

Dans ce cas, $p = 3b$.

Comme p est un nombre premier, nécessairement, $b = 1$.

a et b sont bien premiers entre eux.

2$^{\text{e}}$ cas : $b = 0$

Dans ce cas, $p = 2a$.

Comme p est un nombre premier, nécessairement, $a = 1$.

a et b sont bien premiers entre eux.

3^e^ cas : a et b sont non nuls

Dans ce cas, $p > a$ (car $p - a = a + 3b > 0$) et $p > b$ (car $p - b = 2a + 2b > 0$).

p ne peut donc pas diviser a et b.

On en déduit que $d \neq p$ ce qui entraîne $d = 1$.

Le seul diviseur positif commun à a et b est donc 1.

On en conclut que a et b sont premiers entre eux.

Meilleure justification :

On suppose que p est un diviseur commun à a et b.

$p \mid a \Rightarrow p \mid 2a \Rightarrow \; p \leqslant 2a \quad (1)$
$p \mid b \Rightarrow p \mid 3b \Rightarrow \; p \leqslant 3b \quad (2)$

Par addition membre à membre de (1) et (2), $2p \leqslant p$ d'où $p \leqslant 0$ ce qui est absurde.

III.

1°)

• Démontrons que $p \mid a^2$.

$\text{PGCD}(a+b\,;ab) = p$ donc $p \mid a+b$ et $p \mid ab$.

Donc p divise toute combinaison de $a+b$ et de ab à coefficients entiers.

On considère la combinaison linéaire $u \times (a+b) + v \times ab$ avec $u = a$ et $v = -1$.

$p \mid (a+b)\times a - ab$ d'où $p \mid a^2$ (car $(a+b)\times a - ab = a^2$).

• Déduisons-en que $p \mid a$.

p est un nombre premier donc $p \mid a$ ou $p \mid a$.
Donc $p \mid a$.

2°) Déduisons-en $\text{PGCD}(a\,;b)$.

Soit d un diviseur positif commun à a et b.

$d \mid a+b$ et $d \mid ab$

Donc $d \mid p$ et comme p est premier, $d = 1$ ou $d = p$.

Donc les diviseurs positifs communs à a et b sont 1 et p.

Or p diviseur commun à a et b.

Donc le plus grand diviseur commun à a et b est p.

On peut donc écrire $\text{PGCD}(a\,;b) = p$.

IV.

$a_n = 49 \times 10^n$

1°) Déterminons le reste de la division euclidienne de a_n par 11 suivant les valeurs de n.

$10 \equiv -1$ (mod. 11) donc $10^n \equiv (-1)^n$ (mod. 11).

De plus, $49 \equiv 5$ (mod. 11).

Par produit, on obtient $a_n \equiv 5 \times (-1)^n$ (mod. 11).

1^er^ cas : n pair

On a alors : $a_n \equiv 5$ (mod. 11).
Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de a_n par 11 est égal à 5.

2^e^ cas : n impair

On a alors : $a_n \equiv -5$ (mod. 11) donc $a_n \equiv 6$ (mod. 11).
Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de a_n par 11 est égal à 6.

2°) Déterminons le reste de la division euclidienne de $a_n^{\,2}$ par 11.

On reprend la congruence $a_n \equiv 5 \times (-1)^n$ (mod. 11).

Il est plus facile de repartir de cette relation que de prendre le résultat de la question 1°).

En élevant les deux membres au carré, on obtient $a_n^{\,2} \equiv \left[5 \times (-1)^n\right]^2$ (mod. 11).

Or $\left[5 \times (-1)^n\right]^2 = 25 \times (-1)^{2n} = 25$.

Donc $a_n^{\,2} \equiv 25$ (mod. 11).

Or $25 \equiv 3$ (mod. 11).

Par suite, $a_n^{\,2} \equiv 3$ (mod. 11).

On en déduit que le reste de la division euclidienne de $a_n^{\,2}$ par 11 est 3.

3°) Exprimons en fonction de n le nombre de diviseurs positifs de a_n^2.

On a :

$$a_n^2 = 49^2 \times 10^{2n}$$

$$= 7^4 \times 2^{2n} \times 5^{2n}$$

Cette dernière égalité donne la décomposition en facteurs premiers de $a_n{}^2$ lorsque $n \geqslant 1$.

Soit N le nombre de diviseurs positifs de a_n^2.

$$\mathrm{N} = (4+1)(2n+1)(2n+1) = 5 \times (2n+1)^2$$

Cette formule convient aussi bien pour $n = 0$ que pour $n \geqslant 1$.