$1^{\text{ère}}$ **S1**

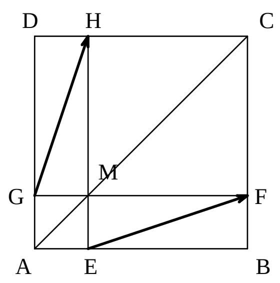
Contrôle du vendredi 13 mars 2015 (30 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………   **Note : …. / 20**

Dans les exercices **I** et **II**, une unité de longueur est fixée dans le plan.

I. (4 points)

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit M un point quelconque du segment [AC].
La droite passant par M et parallèle à (AB) coupe le segment [AD] en G et le segment [BC] en F.
La droite passant par M et parallèle à (AD) coupe le segment [AB] en E et le segment [CD] en H.
On pose $\text{AE} = x$.
Le but de l'exercice est d'exprimer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\text{EF}} \bullet \overrightarrow{\text{GH}}$ en fonction de *x*.



(il est demandé de ne rien écrire sur la figure)

1°) En observant que l'on peut écrire $\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{EB}} + \overrightarrow{\text{BF}}$ et $\overrightarrow{\text{GH}} = \overrightarrow{\text{GD}} + \overrightarrow{\text{DH}}$ (relation de Chasles), écrire *p* comme somme de quatre produits scalaires.

$p =$ ……………………………………………………………………………………

(écrire très lisiblement et sans rature)

2°) Achever le calcul de *p* en donnant le résultat sous forme factorisée. On rédigera les explications utiles.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

II. (2 points)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\left\|\vec{u}\right\| = 2$, $\left\|\vec{v}\right\| = 5$ et $\vec{u} \bullet \vec{v} = -2$.
Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois, calculs au brouillon) :

$\left(\vec{v} - 3\vec{u}\right)^2 =$ …………………… $\left(\vec{v} - \vec{u}\right) \bullet \left(\vec{u} - 2\vec{v}\right) =$ ……………………

III. (5 points : 2 points + 1 point + 1 point + 1 point)

Une urne contient deux fois plus de boules noires que de boules blanches.
On tire 4 boules successivement avec remise.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules noires obtenues lors de la série des 4 tirages.

1°) Compléter la phrase en donnant toutes les précisions utiles.

X suit la loi ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X (valeurs exactes).

$\text{E}(\text{X}) =$ ………………… $\sigma(\text{X}) =$ …………………

3°) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux boules noires. Présenter les calculs. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

IV. (3 points : 1 point + 1 point + 1 point)

Michel joue à un jeu où la probabilité de gagner une partie est 0,35. Il fait 20 parties successives (les parties sont indépendantes).
Pour chaque calcul, on utilisera la calculatrice et on donnera directement la valeur arrondie au millième du résultat sans expliquer (un seul résultat sans égalité).

Calculer la probabilité que Michel gagne :

1°) exactement 5 parties 2°) au moins 10 parties 3°) entre 8 et 15 parties (8 et 15 compris).

1°) …………………………. 2°) …………………………. 3°) ………………………….

V. (3 points : 1 point + 1 point + 1 point)

On veut creuser un puits dont la profondeur est un nombre entier de mètres.
Le 1^er^ mètre coûte 90 €, le 2^e^ mètre 110 €, le 3^e^ mètre 130 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le prix en euros du n-ième mètre.

Ainsi, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ et $u_1 = 90$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) (donner toutes les précisions utiles).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ……………………………. (une seule égalité)

……

……

2°) Exprimer u_n en fonction de n où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ …………………………….

(une seule égalité, sous forme simplifiée ; la lettre n doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite)

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = 10n^2 + 80n$.
Si l'on dispose d'un budget de 34 650 €, quelle profondeur maximale de puits peut-on creuser ?
Répondre à cette question sans faire de calcul, en utilisant la calculatrice.

……………………….. (un seul résultat, sans égalité, ni justification)

VI. (3 points : 1 point + 1 point + 1 point)

Une enquête réalisée sur les lecteurs d'une bibliothèque révèle que :
- chaque année 98 % des lecteurs inscrits l'année précédente reprennent un abonnement,
- chaque année, on compte 200 nouveaux abonnés.

Cette année, la bibliothèque compte 5000 abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à la bibliothèque au bout de n années.

La suite (u_n) est donc définie sur $\mathbb{N}$ et $u_0 = 5000$.

On notera que dans ce modèle mathématique, u_n peut ne pas être un nombre entier.

On ne cherchera pas l'expression de u_n en fonction de n.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n sans expliquer.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ………………………..…………………. (une seule égalité)

« Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice.

2°) Donner la valeur arrondie à l'unité de u_{10}.

$u_{10} \approx$ .... (valeur arrondie à l'unité)

3°) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n). Faire une phrase en commençant par « D'après la calculatrice, il semble que la suite (u_n) est … ».

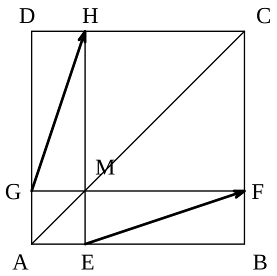
……

Corrigé du contrôle du 13-3-2015

Dans les exercices **I** et **II**, une unité de longueur est fixée dans le plan.

I.

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit M un point quelconque du segment [AC].
La droite passant par M et parallèle à (AB) coupe le segment [AD] en G et le segment [BC] en F.
La droite passant par M et parallèle à (AD) coupe le segment [AB] en E et le segment [CD] en H.
On pose $\text{AE} = x$.
Le but de l'exercice est d'exprimer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\text{EF}} \cdot \overrightarrow{\text{GH}}$ en fonction de *x*.



(il est demandé de ne rien écrire sur la figure)

1°) En observant que l'on peut écrire $\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{EB}} + \overrightarrow{\text{BF}}$ et $\overrightarrow{\text{GH}} = \overrightarrow{\text{GD}} + \overrightarrow{\text{DH}}$ (relation de Chasles), écrire *p* comme somme de quatre produits scalaires.

$$p = \overrightarrow{\text{EB}} \cdot \overrightarrow{\text{GD}} + \overrightarrow{\text{EB}} \cdot \overrightarrow{\text{DH}} + \overrightarrow{\text{BF}} \cdot \overrightarrow{\text{GD}} + \overrightarrow{\text{BF}} \cdot \overrightarrow{\text{DH}}$$

(écrire très lisiblement et sans rature)

2°) Achever le calcul de *p* en donnant le résultat sous forme factorisée. On rédigera les explications utiles.

$\overrightarrow{\text{EB}} \perp \overrightarrow{\text{GD}}$ donc $\overrightarrow{\text{EB}} \cdot \overrightarrow{\text{GD}} = 0$

$\overrightarrow{\text{BF}} \perp \overrightarrow{\text{DH}}$ donc $\overrightarrow{\text{BF}} \cdot \overrightarrow{\text{DH}} = 0$

$$\begin{aligned} p &= \overrightarrow{\text{EB}} \cdot \overrightarrow{\text{DH}} + \overrightarrow{\text{BF}} \cdot \overrightarrow{\text{GD}} \\ &= \text{EB} \times \text{DH} + \text{BF} \times \text{GD} \\ &= (1-x) \times x + x \times (1-x) \\ &= 2x(1-x) \end{aligned}$$

Pour justifier la deuxième ligne du calcul, on doit dire que les vecteurs $\overrightarrow{\text{EB}}$ et $\overrightarrow{\text{DH}}$, d'une part, $\overrightarrow{\text{BF}}$ et $\overrightarrow{\text{GD}}$, d'autre part, sont colinéaires de même sens.
On notera que dès lors que l'on passe aux distances on utilise le symbole de multiplication $\times$ car on multiplie des nombres réels entre eux.

Pour la troisième ligne, on utilise directement $\text{DH} = \text{AE} = \text{BF} = x$ et $\text{EB} = \text{CF} = \text{DG} = \text{CH} = 1 - x$.

II.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.
Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois, calculs au brouillon) :

$\left(\vec{v} - 3\vec{u}\right)^2 = 73$ $\qquad$ $\left(\vec{v} - \vec{u}\right) \cdot \left(\vec{u} - 2\vec{v}\right) = -60$

On commence par développer chaque produit scalaire jusqu'à obtenir une expression « développée réduite ».
Ensuite, on passe à l'application numérique.

Pour le premier calcul, on utilise une identité remarquable scalaire.

$$\begin{aligned} \left(\vec{v} - 3\vec{u}\right)^2 &= \vec{v}^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{u}^2 \\ &= 25 - 6 \times (-2) + 9 \times 4 \\ &= 73 \end{aligned}$$

On utilise la propriété suivante du carré scalaire d'un vecteur : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 2^2 = 4$.

$$\begin{aligned} \left(\vec{v} - \vec{u}\right) \cdot \left(\vec{u} - 2\vec{v}\right) &= \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \left(2\vec{v}\right) - \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \left(2\vec{v}\right) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) - \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v}^2 - \vec{u}^2 + 2\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) \\ &= -\vec{u}^2 + 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v}^2 \\ &= -4 + 3 \times (-2) - 2 \times 25 \\ &= -4 - 6 - 50 \\ &= -60 \end{aligned}$$

III.

Une urne contient deux fois plus de boules noires que de boules blanches.
On tire 4 boules successivement avec remise.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules noires obtenues lors de la série des 4 tirages.

1°) Compléter la phrase en donnant toutes les précisions utiles.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

Beaucoup d'élèves ont eu des difficultés à trouver la valeur de *p*.
Il fallait utiliser l'information « L'urne contient deux fois plus de boules noires que de boules blanches ».
Si on note *a* le nombre de boules banches, le nombre de boules noires est alors égal à 2*a*.
Le nombre total de boules est égal à 3*a*. Donc la probabilité de tirer une boule noire est égale à $\dfrac{2a}{3a} = \dfrac{2}{3}$.

2°) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X (valeurs exactes).

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{8}{3} \qquad \sigma(\mathrm{X}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

3°) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux boules noires. Présenter les calculs. Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\begin{aligned} P(\text{"obtenir exactement 2 boules noires"}) &= P(\mathrm{X}=2) \\ &= \binom{4}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

On utilise la calculatrice ou le triangle de Pascal pour trouver la valeur de $\binom{4}{2}$. On trouve 6.

On peut vérifier le résultat de la probabilité grâce à la calculatrice.

IV.

Michel joue à un jeu où la probabilité de gagner une partie est 0,35. Il fait 20 parties successives (les parties sont indépendantes).
Pour chaque calcul, on utilisera la calculatrice et on donnera directement la valeur arrondie au millième du résultat sans expliquer (un seul résultat sans égalité).

Calculer la probabilité que Michel gagne :

1°) exactement 5 parties 2°) au moins 10 parties 3°) entre 8 et 15 parties (8 et 15 compris).

1°) 0,127 2°) 0,122 3°) 0,399

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées à l'issue des 20 parties.
X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,35.

Les résultats sont chaque fois des nombres décimaux car 0,35 est un nombre décimal.

1°) Il s'agit du calcul de $P(\mathrm{X}=5)$.

Sur calculatrice, on tape : binompdf(20,0.35,5). On obtient l'affichage : 0,1271991857.

2°) Il s'agit du calcul de $P(\mathrm{X} \geqslant 10) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 9)$.

Sur calculatrice, on tape : 1 – binomcdf(20,0.35,9). On obtient l'affichage : 0,1217805861.

3°) Il s'agit du calcul de $P(8 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 15) = P(\mathrm{X} \leqslant 15) - P(\mathrm{X} \leqslant 7)$.

Sur calculatrice, on tape : binomcdf(20,0.35,15) – binomcdf(20,0.35,7). On obtient l'affichage : 0,3989234556.

V.

On veut creuser un puits dont la profondeur est un nombre entier de mètres.
Le 1$^{\text{er}}$ mètre coûte 90 €, le 2$^{\text{e}}$ mètre 110 €, le 3$^{\text{e}}$ mètre 130 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le prix en euros du n-ième mètre.
Ainsi, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ et $u_1 = 90$.

Il s'agit d'un exercice montrant l'utilisation d'une suite dans une situation concrète.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) (donner toutes les précisions utiles).

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + 20$ (une seule égalité)

2°) Exprimer u_n en fonction de n où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 20n + 70$$

(une seule égalité, sous forme simplifiée ; la lettre n doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite)

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = 10n^2 + 80n$.
Si l'on dispose d'un budget de 34 650 €, quelle profondeur maximale de puits peut-on creuser ?
Répondre à cette question sans faire de calcul, en utilisant la calculatrice.

55 m (un seul résultat, sans égalité, ni justification)

S_n représente le coût total en euros d'un puits de n mètres.

On cherche le plus grand entier naturel $n \geqslant 1$ tel que : $S_n \leqslant 34650$.

On utilise la calculatrice afin d'avoir un tableau des valeurs de S_n en fonction de n.

1$^{\text{ère}}$ façon : mode fonction
On rentre la fonction : $x \mapsto 10x^2 + 80x$.

On règle la table pour qu'elle commence à 1 avec un pas de 1.

2e façon : mode suite

On rentre la suite $n \mapsto 10n^2 + 80n$.

nMin $= 1$
$\text{u}(n) = 10n^2 + 80n$
$\text{u}(n\text{Min})$ $\to$ on n'écrit rien

La valeur 34 650 apparaît dans le tableau de valeurs.

VI.

Une enquête réalisée sur les lecteurs d'une bibliothèque révèle que :
- chaque année 98 % des lecteurs inscrits l'année précédente reprennent un abonnement,
- chaque année, on compte 200 nouveaux abonnés.

Cette année, la bibliothèque compte 5000 abonnés.
Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le nombre d'abonnés à la bibliothèque au bout de *n* années.

La suite (u_n) est donc définie sur $\mathbb{N}$ et $u_0 = 5000$.

On notera que dans ce modèle mathématique, u_n peut ne pas être un nombre entier.

On ne cherchera pas l'expression de u_n en fonction de *n*.

Il s'agit d'un exercice montrant l'utilisation d'une suite dans une situation concrète.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n sans expliquer.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 0,98u_n + 200 \text{ (une seule égalité)}$$

« Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice.

nMin $= 0$
$\text{u}(n) = 0.98 * u(n-1) + 200$
$\text{u}(n\text{Min}) = \{5000\}$

2°) Donner la valeur arrondie à l'unité de u_{10}.

$$u_{10} \approx 5915 \text{ (valeur arrondie à l'unité)}$$

3°) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n). Faire une phrase en commençant par « D'après la calculatrice, il semble que la suite (u_n) est … ».

D'après la calculatrice, il semble que la suite (u_n) est strictement croissante.