1$^{\text{ère}}$ S1

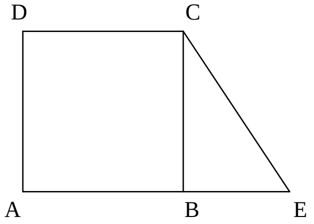
Contrôle du vendredi 6 mars 2015 (30 min)

Prénom : ………………………………… **Nom :** ………………………………… **Note : …. / 20**

Il est demandé de ne rien écrire sur les figures de l'énoncé.
Dans les exercices **I** à **III**, une unité de longueur est fixée dans le plan.

I. (3 points)

Soit ABCD un carré de côté 3. Soit E le point de la droite (AB) n'appartenant pas au segment [AB] tel que $BE = 2$.
Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE}$, $p_2 = \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AD}$, $p_3 = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EB}$ en utilisant des projetés orthogonaux.
On justifiera chaque calcul avec précision par une phrase.



………

………

………

………

………

………

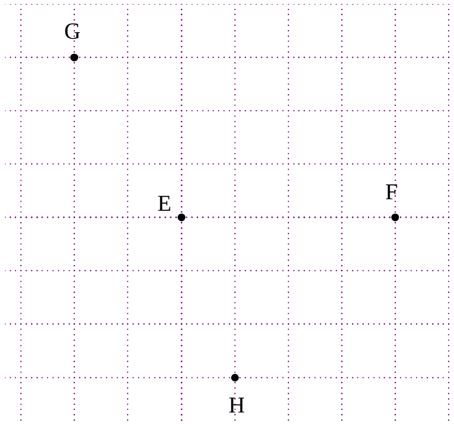
………

………

………

II. (3 points)

On considère les points E, F, G, H sur le quadrillage ci-dessous. L'unité de longueur est le carreau.
On donne en annexe deux figures identiques à la figure ci-dessous afin d'effectuer le tracé des vecteur et les constructions des projetés orthogonaux nécessaires aux calculs des produits scalaires de la question 1°).



1°) Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$ et $p_2 = \overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{FE}$ en utilisant des projetés orthogonaux.

Pour chaque produit scalaire, il est demandé de définir clairement le projeté orthogonal d'un point (selon le modèle suivant : « Soit T le projeté orthogonal du point R sur la droite (UV) » puis d'effectuer le calcul du produit scalaire sur une ligne.

Sur les figures données sur la feuille annexe, tracer les vecteurs qui interviennent dans les produits scalaires et construire les projetés orthogonaux en marquant le codage des angles droits.

………

………

………

………

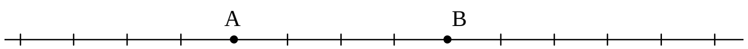
………

2°) Quel est le signe du produit scalaire $p_3 = \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{EH}$? Répondre en une phrase sans chercher à calculer p_3.

………

III. (2 points)

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$.
Placer sur la figure ci-dessous les points M et N de la droite (AB) tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$ et $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = -12$.
Définir chacun des points M et N par une phrase claire.



- Le point M est le point de ……………………………………………………………………………………………

- Le point N est le point de ……………………………………………………………………………………………

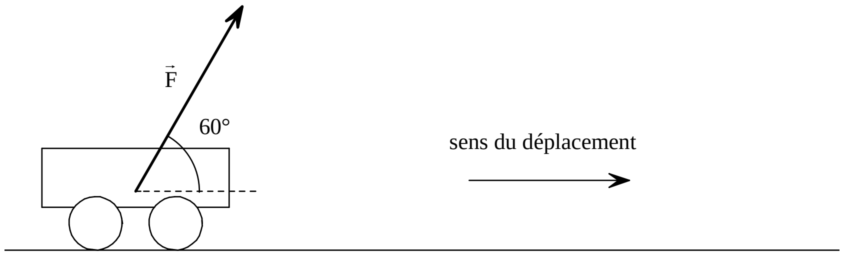
IV. (1 point)

Un chariot se déplace sur des rails rectilignes. Une force de traction constante notée $\vec{F}$ d'intensité 3000 N est exercée sur le chariot. Elle fait un angle de 60° avec l'horizontale.

Calculer le travail de $\vec{F}$ pour un déplacement de A à B avec $AB = 20$ m.

On rappelle que :

- le travail de $\vec{F}$, noté W, est donné par $W = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{F}$;
- lorsque l'intensité de $\vec{F}$ est exprimée en newtons et AB en mètres, W est exprimé en joules (J).



………

V. (5 points)

On veut creuser un puits dont la profondeur est un nombre entier de mètres.
Le 1er mètre coûte 100 €, le 2e mètre 120 €, le 3e mètre 140 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le prix en euros du *n*-ième mètre. On a donc $u_1 = 100$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) (donner toutes les précisions utiles).

.... (une seule égalité)

La suite (u_n) est ……………………………………………………………………………………………

………

2°) Exprimer u_n en fonction de *n* où *n* est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

.... (une seule égalité, sous forme simplifiée)

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note S_n la somme de tous les termes de la suite de u_1 à u_n c'est-à-dire $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Par exemple, pour $n = 5$, $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.

On ne cherchera pas dans cette question l'expression explicite de S_n en fonction de *n*.

On donne dans les tableaux en annexe les valeurs de S_n pour $n \in \{1 ; 2 ; ... ; 60\}$.

• Combien coûtera le puits si on creuse 30 mètres ? …………….. (un seul résultat, sans égalité, ni justification)

• On dispose d'un budget de 33 000 €. Quelle profondeur maximale de puits peut-on creuser ?

……………….. (un seul résultat, sans égalité, ni justification)

4°) On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = 10n^2 + 90n$.

Retrouver par le calcul le coût d'un puits de 30 mètres de profondeur. Écrire une seule ligne de calcul.

………

VI. (1 point)

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier $u_0 = 14$ et de raison $r = -3$.

Déterminer le sens de la variation de la suite (u_n). Justifier.

………

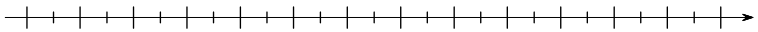
………

VII. (3 points)

Dans le tableau ci-dessous, on donne la répartition des âges d'un groupe d'adultes.

Âge	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Effectif	18	21	24	31	36	31	30	27	28	14

Représenter le diagramme en boîte correspondant (on effectuera les calculs nécessaires au brouillon).



VIII. (2 points)

Une enquête réalisée sur les lecteurs d'une bibliothèque révèle que :

- chaque année 98 % des lecteurs inscrits l'année précédente reprennent un abonnement,
- chaque année, on compte 200 nouveaux abonnés.

Cette année, la bibliothèque compte 5000 abonnés.

Quel sera le nombre d'abonnés au bout d'un an ? Au bout de deux ans ? Détailler les calculs.

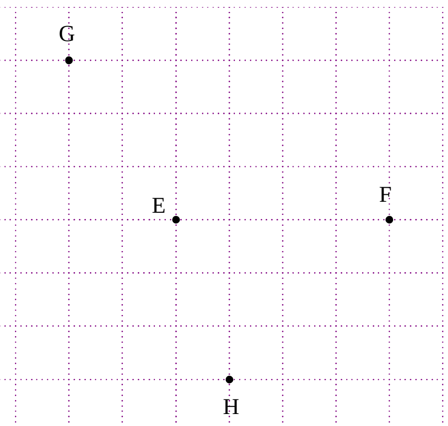
………

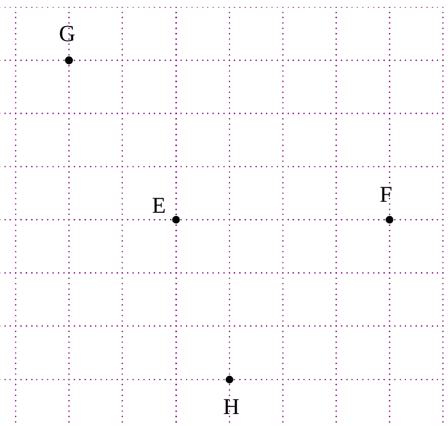
………

Prénom : ………………………………. **Nom :** ……………………………….

Annexe du contrôle du 6-3-2015

I. 1°) Figures pour le tracé des vecteurs et la construction des projetés orthogonaux (une figure par produit scalaire).





V. 5°) Tableaux de valeurs

n	S_n
1	100
2	220
3	360
4	520
5	700
6	900
7	1120
8	1360
9	1620
10	1900
11	2200
12	2520
13	2860
14	3220
15	3600
16	4000
17	4420
18	4860
19	5320
20	5800

n	S_n
21	6300
22	6820
23	7360
24	7920
25	8500
26	9100
27	9720
28	10360
29	11020
30	11700
31	12400
32	13120
33	13860
34	14620
35	15400
36	16200
37	17020
38	17860
39	18720
40	12400

n	S_n
41	20500
42	21420
43	22360
44	23320
45	24300
46	25300
47	26320
48	27360
49	28420
50	29500
51	30600
52	31720
53	32860
54	34020
55	35200
56	36400
57	37620
58	38860
59	40120
60	41400

Remarques orales en réponse à des questions d'élèves

II.

● Il ne faut pas respecter les lettres évidemment (elles ne sont données qu'à titre d'exemple).

● Donner un nom aux projetés orthogonaux (on nomme les points comme on veut).

● On doit rajouter des points. Autrement dit, on doit « créer » des points.

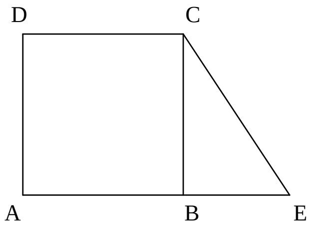
VII.

Faire le diagramme en boîte au crayon à papier ou au critérium.

Corrigé du contrôle 6-3-2015

I.

Soit ABCD un carré de côté 3. Soit E le point de la droite (AB) n'appartenant pas au segment [AB] tel que $BE = 2$.
Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BE}$, $p_2 = \overrightarrow{CE} \bullet \overrightarrow{AD}$, $p_3 = \overrightarrow{ED} \bullet \overrightarrow{EB}$ en utilisant des projetés orthogonaux.
On justifiera chaque calcul avec précision par une phrase.



Cet exercice porte sur des calculs de produits scalaires en utilisant la méthode du projeté orthogonal.
Dans cet exercice, les projetés orthogonaux apparaissent déjà sur la figure.

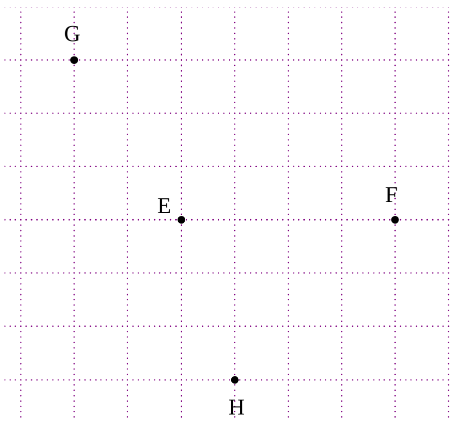
ABCD est un carré donc B est le projeté orthogonal de C sur la droite (BE).
Donc $p_1 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BE} = AB \times BE = 3 \times 2$.

B est le projeté orthogonal de E sur (BC).
Donc $p_2 = \overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{AD} = -\,CB \times AD = -\,3 \times 3 = -\,9$.

A est le projeté orthogonal de D sur la droite (AE).
Donc $p_3 = \overrightarrow{EA} \bullet \overrightarrow{EB} = EA \times EB = 5 \times 2 = 10$.

II.

On considère les points E, F, G, H sur le quadrillage ci-dessous. L'unité de longueur est le carreau.
On donne en annexe deux figures identiques à la figure ci-dessous afin d'effectuer le tracé des vecteur et les constructions des projetés orthogonaux nécessaires aux calculs des produits scalaires de la question 1°).



1°) Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{EG}$ et $p_2 = \overrightarrow{FH} \bullet \overrightarrow{FE}$ en utilisant des projetés orthogonaux.

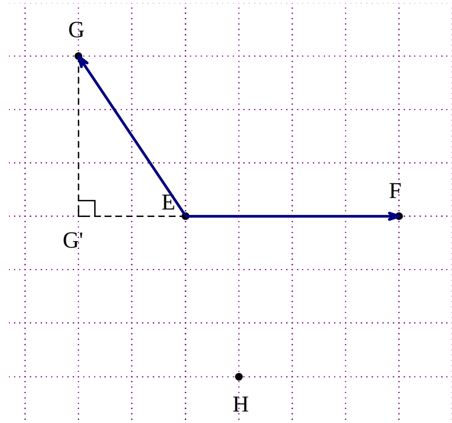
Pour chaque produit scalaire, il est demandé de définir clairement le projeté orthogonal d'un point (selon le modèle suivant : « Soit T le projeté orthogonal du point R sur la droite (UV) » puis d'effectuer le calcul du produit scalaire sur une ligne.

Sur les figures données sur la feuille annexe, tracer les vecteurs qui interviennent dans les produits scalaires et construire les projetés orthogonaux en marquant le codage des angles droits.

Cet exercice porte sur des calculs de produits scalaires en utilisant la méthode du projeté orthogonal.
Dans cet exercice, les projetés orthogonaux n'apparaissent pas sur la figure.
C'est à l'élève de définir (de « créer ») les projetés orthogonaux nécessaires aux calculs des produits scalaires.

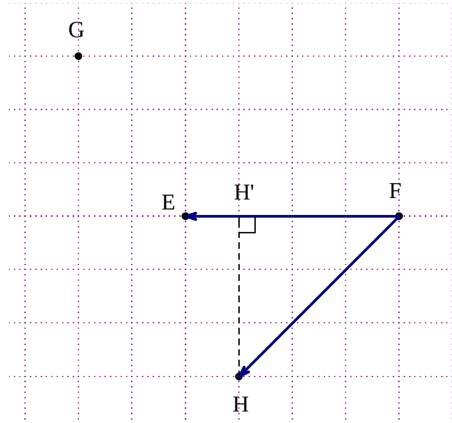
Plusieurs élèves n'ont pas respecté la consigne : ils n'ont pas défini les projetés qu'ils ont utilisés ensuite dans le calcul des produits scalaires.

• Soit G' le projeté orthogonal de G sur la droite (EF).



$p_1 = \overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{EG'} = -\,EF \times EG' = -\,4 \times 2 = -\,8$

• Soit H' le projeté orthogonal de H sur la droite (EF).



$p_2 = \overrightarrow{FH'} \bullet \overrightarrow{FE} = FH' \times FE = 3 \times 4 = 12$

2°) Quel est le signe du produit scalaire $p_3 = \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{EH}$? Répondre en une phrase sans chercher à calculer p_3.

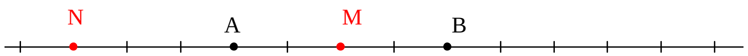
Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EH}$ ont la même origine donc on peut répondre immédiatement à la question.

$p_3 < 0$ car l'angle $\widehat{GEH}$ est obtus.

J'ai trouvé beaucoup de réponses fausses du type « Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont de sens opposés (ou contraires) donc leur produit scalaire est négatif ». C'est absurde puisque les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EH}$ ne sont pas colinéaires : ils n'ont donc pas la même direction !

III.

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$.
Placer sur la figure ci-dessous les points M et N de la droite (AB) tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$ et $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = -12$.
Définir chacun des points M et N par une phrase claire.



Il est bien évident que l'on doit définir les points M et N sans utiliser de produit scalaire.
On attendait une réponse sans utiliser de produit scalaire.

La meilleure façon est la suivante :

- Le point M est le point de la droite (AB) tel que $AM = 2$ et les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens.

- Le point N est le point de la droite (AB) tel que $AN = 3$ et les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de sens contraire.

Une autre façon tout aussi bonne est la suivante :

- Le point M est le point du segment $[AB]$ tel que $AM = 2$.

- Le point N est le point de la droite (AB) n'appartenant $[AB]$ tel que $AN = 3$.

Autres façons moins naturelles mais justes :

- Le point M est le milieu de $[AB]$.

- Le point N est le point de la demi-droite [BA) tel que $BN = 7$.

Pour cette question, j'ai trouvé beaucoup d'horreurs, par exemple :

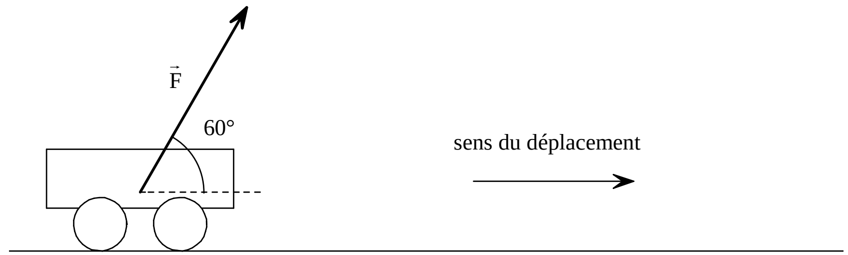
- Le point M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = 2$.

- Le point N est le point tel que $\overrightarrow{AN} = -3$.

C'est complètement absurde : un vecteur ne peut être égal à un nombre !

IV.

Un chariot se déplace sur des rails rectilignes. Une force de traction constante notée $\vec{F}$ d'intensité 3000 N est exercée sur le chariot. Elle fait un angle de 60° avec l'horizontale.
Calculer le travail de $\vec{F}$ pour un déplacement de A à B avec $AB = 20$ m.
On rappelle que :
- le travail de $\vec{F}$, noté W, est donné par $W = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{F}$;
- lorsque l'intensité de $\vec{F}$ est exprimée en newtons et AB en mètres, W est exprimé en joules (J).



$$W = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{F} = AB \times F \times \cos 60° = 20 \times 3000 \times \frac{1}{2} = 30\ 000 \text{ J}$$

Commentaires :

- Un travail est une énergie : elle est donc dans la même unité qu'une énergie.

- $W > 0$ ce qui est logique puisque l'angle formé par les vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ est aigu.
Il s'agit donc d'un travail moteur.

V.

On veut creuser un puits dont la profondeur est un nombre entier de mètres.
Le 1[er] mètre coûte 100 €, le 2[e] mètre 120 €, le 3[e] mètre 140 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le prix en euros du n-ième mètre. On a donc $u_1 = 100$.

Attention la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$; le premier terme est u_1. Cela a une grande importance pour la question 2°) : u_0 n'existe pas !

On notera que la suite (u_n) est définie par compréhension.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) (donner toutes les précisions utiles).

$u_{n+1} = u_n + 20$ (une seule égalité, sous forme simplifiée)

Il faut bien écrire une égalité donc utiliser le signe = ; certains élèves ont juste écrit le second membre $u_n + 20$.
Ça n'a pas de sens.

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 100$ et de raison $r = 20$.

2°) Exprimer u_n en fonction de n où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

On utilise la formule $u_n = u_1 + (n-1)r$ car la suite est définie à partir de u_1.

$u_n = 100 + 20(n-1)$ (une seule égalité, sous forme simplifiée)

$$u_n = 20n + 80$$

La seule lettre qui figure dans le membre de droite est n.
On doit remplacer u_1 et r par leurs valeurs respectives puis on doit simplifier de manière à ne plus avoir de parenthèses.

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note S_n la somme de tous les termes de la suite de u_1 à u_n c'est-à-dire $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Par exemple, pour $n = 5$, $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.
On ne cherchera pas dans cette question l'expression explicite de S_n en fonction de n.
On donne dans les tableaux en annexe les valeurs de S_n pour $n \in \{1\,;2\,;...\,;60\}$.

• Combien coûtera le puits si on creuse 30 mètres ?

11 700 € (un seul résultat, sans égalité, ni justification)

• On dispose d'un budget de 33 000 €. Quelle profondeur maximale de puits peut-on creuser ?

53 m (un seul résultat, sans égalité, ni justification)

4°) On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = 10n^2 + 90n$.
Retrouver par le calcul le coût d'un puits de 30 mètres de profondeur. Écrire une seule ligne de calcul.

$$S_{30} = 10 \times 30^2 + 30 \times 30 = 11700$$

VI.

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier $u_0 = 14$ et de raison $r = -3$.
Déterminer le sens de la variation de la suite (u_n). Justifier.

La suite (u_n) est strictement décroissante car la raison r est strictement négative.

Commentaire :

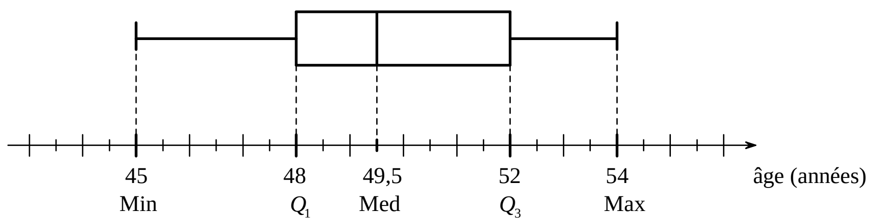
On dit que la suite (u_n) est strictement décroissante tout court. On ne dit pas « strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ ».
On peut éventuellement dire que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0

VII.

Dans le tableau ci-dessous, on donne la répartition des âges d'un groupe d'adultes.

Âge	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Effectif	18	21	24	31	36	31	30	27	28	14

Représenter le diagramme en boîte correspondant (on effectuera les calculs nécessaires au brouillon).



On vérifie le diagramme en boîte en utilisant la calculatrice.

On doit impérativement indiquer la légende.

VIII.

Une enquête réalisée sur les lecteurs d'une bibliothèque révèle que :
- chaque année 98 % des lecteurs inscrits l'année précédente reprennent un abonnement,
- chaque année, on compte 200 nouveaux abonnés.

Cette année, la bibliothèque compte 5000 abonnés.
Quel sera le nombre d'abonnés au bout d'un an ? Au bout de deux ans ? Détailler les calculs.

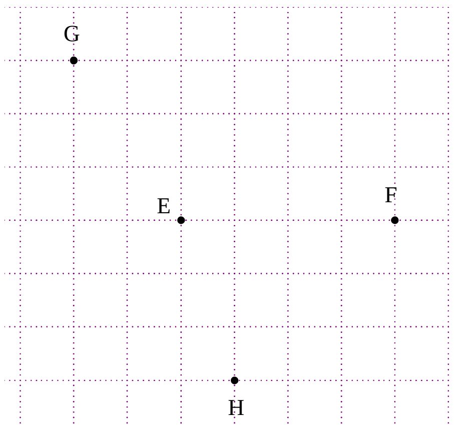
Nombre d'abonnés au bout d'un an : $\dfrac{98\times 5000}{100}+200=4900+200=5100$

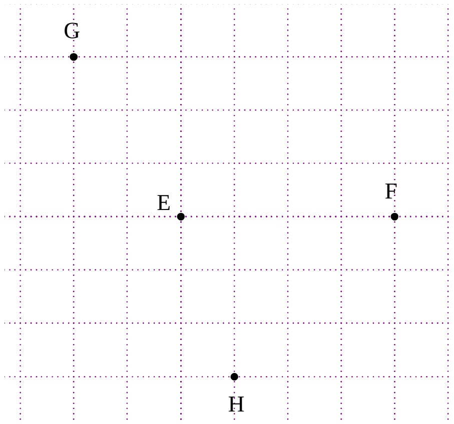
Nombre d'abonnés au bout de deux ans : $\dfrac{98\times 5100}{100}+200=5198$

Prénom : ……………………………… Nom : ………………………………

Annexe du contrôle du 6-3-2015

I. 1°) Figures pour le tracé des vecteurs et la construction des projetés orthogonaux (une figure par produit scalaire).





V. 5°) Tableaux de valeurs

n	S_n
1	100
2	220
3	360
4	520
5	700
6	900
7	1120
8	1360
9	1620
10	1900
11	2200
12	2520
13	2860
14	3220
15	3600
16	4000
17	4420
18	4860
19	5320
20	5800

n	S_n
21	6300
22	6820
23	7360
24	7920
25	8500
26	9100
27	9720
28	10360
29	11020
30	11700
31	12400
32	13120
33	13860
34	14620
35	15400
36	16200
37	17020
38	17860
39	18720
40	12400

n	S_n
41	20500
42	21420
43	22360
44	23320
45	24300
46	25300
47	26320
48	27360
49	28420
50	29500
51	30600
52	31720
53	32860
54	34020
55	35200
56	36400
57	37620
58	38860
59	40120
60	41400