TS spécialité

Contrôle du jeudi 6 février 2014 (30 min)

Prénom : …… **Nom :** …… **/20**

I. (6 points : 4 points + 2 points)

1°) **Question de cours**

Soit p nombre premier. Démontrer que pour tout couple (a, b) d'entiers relatifs, on a : $p \mid ab \Leftrightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$.

……..

……..

……..

……..

……..

2°) Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des entiers relatifs x tels que $x^2 \equiv 1$ [mod. p] (1).
On donne la démonstration dans le désordre sous la forme de blocs.
Remettre les blocs dans l'ordre.

A

Donc
(1) $\Leftrightarrow p \mid x-1$ ou $p \mid x+1$
$\Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $x-1=kp)$ ou $(\exists\, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $x+1=k'p)$
$\Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $x=1+kp)$ ou $(\exists\, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $x=-1+k'p)$

B

Or, d'après une propriété sur les nombres premiers, on sait que pour tout couple (a, b) d'entiers relatifs, on a : $p \mid ab \Leftrightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$

C

On en conclut que : $E = \{1+kp, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-1+k'p, k' \in \mathbb{Z}\}$.

D

(1) $\Leftrightarrow x^2-1 \equiv 0$ [mod. p]
$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0$ [mod. p]
$\Leftrightarrow p \mid (x-1)(x+1)$

Ordre choisi : ……

II. (5 points)

On pose $x = p^2 q$ où p et q sont deux nombres premiers distincts.
Donner l'ensemble E de tous les diviseurs de x.

$E =$ .....

III. (9 points : 4 points + 5 points)

Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $a + b = p$, avec p premier.
1°) Démontrer que a et b sont de parité différente.
2°) Démontrer que a et b sont premiers entre eux.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

Corrigé du contrôle du 6-2-2014

I.

1°)

p : nombre premier
$(a\,;b) \in \mathbb{Z}^2$

Démontrons que $p \mid ab \Leftrightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$.

• Si $p \mid a$ ou $p \mid b$, alors de manière évidente $p \mid ab$.

• Réciproquement, supposons que $p \mid ab$. Démontrons qu'alors on a : $p \mid a$ ou $p \mid b$.

1er cas : $p \nmid a$

Dans ce cas, p et a sont premiers entre eux.
Or $p \mid ab$. Donc d'après le théorème de Gauss, $p \mid b$.

2e cas : $p \nmid b$
Même démarche.

Autre méthode :

Avec la décomposition en facteurs premiers.

Une solution fausse :

$p \mid ab \Leftrightarrow ab \equiv 0 \ [\text{mod. } p]$
$\Leftrightarrow a \equiv 0 \ [\text{mod. } p]$ ou $b \equiv 0 \ [\text{mod. } p]$
$\Leftrightarrow \ldots$

Il y a un problème dans l'implication $\Rightarrow$; en effet, il n'y a pas de règle pour les produits nuls avec les modulos.

2°)

D-B-A-C

Il faut savoir refaire le **I.** 2°) sans indication.

II.

$E = \{1 ; p ; q ; pq ; p^2 ; p^2q ; -1 ; -p ; -q ; -pq ; -p^2 ; -p^2q\}$

Il y a 12 diviseurs (ce que l'on pouvait calculer grâce à la formule donnant le nombre de diviseurs positifs d'un entier à partir de sa décomposition en facteurs premiers).

III.

1°) **Démontrons que *a* et *b* sont de parité différente.**

Par hypothèse, on a : $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ donc $a+b \geqslant 4$.

D'où $p \geqslant 4$ et comme p est un nombre premier, on en déduit que $p \geqslant 5$.

Par conséquent, p est impair.
Donc a et b sont de parité différente.

2°) **Démontrons que *a* et *b* sont premiers entre eux.**

Soit d un diviseur entier naturel commun à a et b.

d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de a et b.
En particulier, $d \mid a+b$ soit $d \mid p$.
Or p est premier donc $d = 1$ ou $d = p$.

De plus, on a $p > a$ et $p > b$ donc : $p \nmid a$ et $p \nmid b$.

Donc $d = 1$.
On en conclut que a et b sont donc premiers entre eux.