Les déterminants 3-3

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

Pour calculer le déterminant de A, on peut développer suivant une ligne ou suivant une colonne en tenant compte de signes qui sont rajoutés.
Toutes les méthodes donnent évidemment le même résultat.

$$\begin{pmatrix} +a & -b & +c \\ -a' & +b' & -c' \\ +a'' & -b'' & +c'' \end{pmatrix}$$

Voici ce que donne le développement selon la 1ère colonne :

$$\det A = +a \times \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a' \times \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a'' \times \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

On peut développer de la même manière selon la 1ère ligne, ou la 2e ligne…

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer det A.

$$\det A = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times (-1 \times 1 - 0 \times 3) + (-2 \times 1 - 0 \times 3) + 2 \times (2 \times 3 - 1 \times (-3))$$

$$= 2 - 2 + 18$$

$$= 18$$

On vérifie le résultat sur la calculatrice.

Déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$$\det A = a \times d \times f$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

La règle de Sarrus

$$\det A = +a \times (b'c'' - b''c') - a' \times (bc'' - b''c) + a'' \times (bc' - b'c)$$

$$\det A = ab'c'' - ab''c' - a'bc'' - ab''c + a''bc' - a''b'c$$

On adopte la présentation ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix}$$

Les flèches descendantes avec un + ; les flèches montantes avec un – .

Cette règle ne s'applique qu'à des déterminants 3-3.

Exercice :

Soit x, y, z des réels quelconques.

Démontrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$.

Solution :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} y & z \\ y^2 & z^2 \end{vmatrix} - x \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y^2 & z^2 \end{vmatrix} + x^2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix}$$

$$= \left(yz^2 - zy^2\right) - x\left(z^2 - y^2\right) + x^2 \times (z-y)$$

$$= yz(z-y) - x(z-y)(z+y) + x^2 \times (z-y)$$

$$= (z-y)\left[yz - x(z+y) + x^2\right]$$

$$= (z-y)\left[yz - xz - xy + x^2\right]$$

$$= (z-y)\left[z(y-x) - x(y-x)\right]$$

$$= (z-y)(y-x)(z-x)$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x)$$

Application 1 : critère d'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit A une matrice carrée d'ordre 3.

A est inversible si et seulement si $\det \mathrm{A} \neq 0$.

Remarque :

Il existe une formule donnant la matrice inverse pour une matrice carrée d'ordre 2 similaire à celle donnée poyr les matrices carrées d'ordre 2 : $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathrm{A}} \times {}^t(\mathrm{com}\ \mathrm{A})$. Cette formule sera donnée dans le supérieur.

Application 2 : les formules de Cramer

On considère un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Le système s'écrit matricielle ment $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Si $\det \mathrm{A} \neq 0$, alors le système admet un unique triplet solution (x, y, z) donné par les égalités suivantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det \mathrm{A}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\det \mathrm{A}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\det \mathrm{A}}$$

On écrit souvent :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{cases}$$

où

Δ désigne le déterminant de A,
Δ_x désigne le déterminant de la matrice A dans laquelle on a remplacé la colonne des coefficients de l'inconnue x par la colonne des coefficients constants.
Δ_y désigne le déterminant de la matrice A dans laquelle on a remplacé la colonne des coefficients de l'inconnue y par la colonne des coefficients constants.
Δ_z désigne le déterminant de la matrice A dans laquelle on a remplacé la colonne des coefficients de l'inconnue z par la colonne des coefficients constants.

Application 3 : critère pour déterminer si 3 vecteurs soient coplanaires

On se place dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ quelconque.

$$\overrightarrow{u_1}\left|\begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{u_2}\left|\begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{u_3}\left|\begin{array}{l} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ sont coplanaires si et seulement si $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

Application :

Dans l'espace, on considère le point $\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ ainsi que les deux vecteurs $\vec{u}\,(4\,;0\,;3)$ et $\vec{v}\,(1\,;3\,;-1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan P de repère $\left(\mathrm{A}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit M(x, y, z) un point quelconque de l'espace.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{u}, \vec{v} \text{ sont coplanaires} \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 1 \\ y-1 & 0 & 3 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)\times\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\times\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\times\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)\times(-9) - (y-1)\times(-7) + (z-1)\times 12 = 0 \\
&\Leftrightarrow -9x + 9 + 7y - 7 + 12z - 12 = 0 \\
&\Leftrightarrow -9x + 7y + 12z - 10 = 0
\end{aligned}$$

Deux propriétés à connaître :

- Si une matrice a deux colonnes égales, alors le déterminant est nul.

- Si une matrice a une colonne proportionnelle à une autre, alors le déterminant est nul.