1ère S

Le produit scalaire dans le plan (2) Expression à l'aide du projeté orthogonal

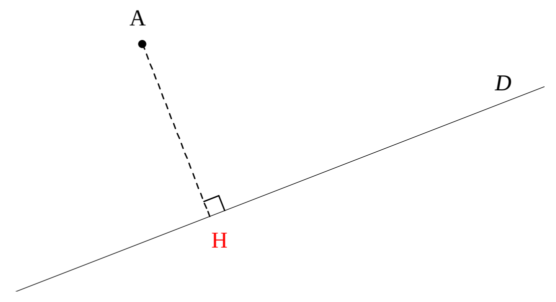
Plan :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à un produit scalaire du type $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ où A, B, C sont trois points du plan.

I. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

1°) Définition [projeté orthogonal d'un point sur une droite du plan]

D est une droite du plan.
A est un point du plan.
On appelle **projeté orthogonal** de A sur *D* le point H d'intersection de la droite *D* et de la droite passant par A et perpendiculaire à *D*.



2°) Caractérisation

Le projeté orthogonal d'un point A sur *D* est le point H de *D* défini par :

- $H = A$ si $A \in D$;
- $(AH) \perp D$ si $A \notin D$.

II. Démonstration

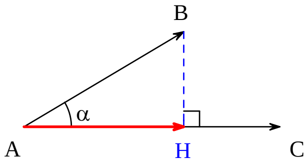
A, B, C sont trois points quelconques tels que $A \neq C$.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

On s'intéresse au produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. On va l'exprimer en utilisant le point H.

On pose $\widehat{BAC} = \alpha$ ($\alpha \in [0 ; \pi]$).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos\alpha \\ &= AB \times \cos\alpha \times AC\end{aligned}$$

• **1er cas :** $\widehat{BAC}$ aigu



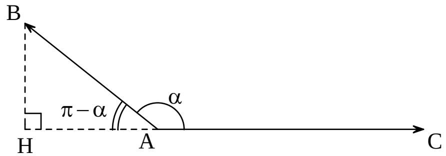
Dans ce cas, $H \in [AC)$.

$AH = AB \times \cos\alpha$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AH \times AC$

$\qquad = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens)

• **2^{e} cas :** $\widehat{BAC}$ obtus



Dans ce cas, H appartient à la demi-droite d'origine A de support (AC), ne contenant pas C.

$AH = AB \times \cos(\pi - \alpha)$

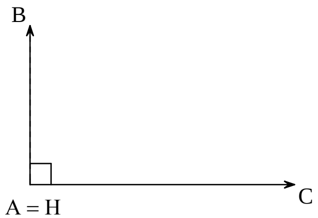
$\quad = AB \times (-\cos\alpha)$

$\quad = -AB \times \cos\alpha$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = -AH \times AC$

$\qquad = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires)

• **3^{e} cas :** $\widehat{BAC}$ droit



$$\underbrace{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0}_{\text{car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}} = \underbrace{\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}}_{\text{car } \overrightarrow{AH} = \vec{0}}$$

Bilan :

Dans les trois cas, on a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}$.

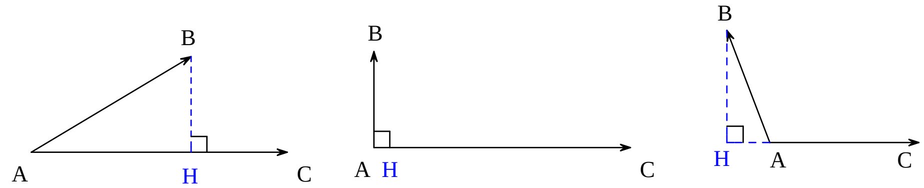
Cette propriété permet de ramener le calcul du produit scalaire de deux vecteurs au calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.

III. Propriété

1°) Énoncé

A, B, C sont trois points quelconques tels que $A \neq C$.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

On a : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}}$.



2°) Commentaires

On peut remplacer $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AH}$ dans le produit scalaire (on ne dit pas que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont égaux).

$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs colinéaires et si $A \neq H$, ils ne sont pas forcément de même sens.

La propriété du projeté orthogonal ne laisse pas de surprendre car dans l'ensemble des réels, on ne peut écrire une égalité du type $3 \times 2 = 3 \times 5$. Si on modifie un facteur dans un produit de réels, le résultat est modifié.
Dès qu'on modifie un facteur, on modifie le résultat.

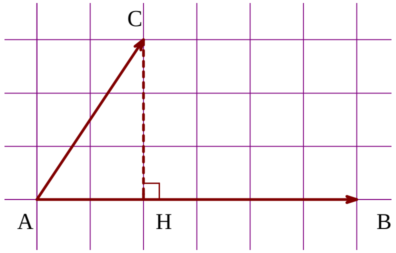
On garde le point A (« point d'attache ») et on remplace le point B par son projeté orthogonal sur (AC).

Cette propriété fournit une autre expression du produit scalaire de deux vecteurs intéressante dans de nombreuses situations.

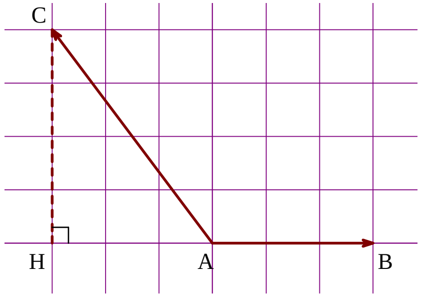
La propriété permet de ramener le calcul d'un produit scalaire de deux vecteurs à un produit scalaire de vecteurs colinéaires.

IV. Application : produit scalaire et quadrillage

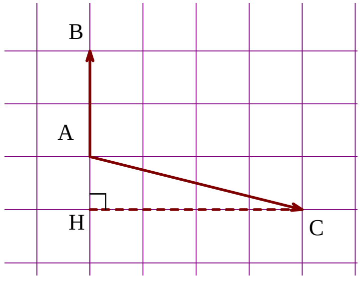
L'unité de longueur est ici la longueur d'un carreau du quadrillage.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 6 \times 2 = 12$$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH = -3 \times 3 = -9$$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH = -2 \times 1 = -2$$

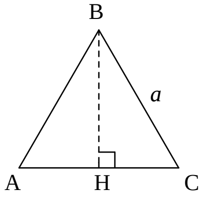
Bilan :

L'expression du produit scalaire avec le projeté orthogonal permet de calculer certains produits scalaires sans utiliser l'angle (ou plutôt sans utiliser le cosinus de l'angle).

V. Autres exemples d'application

1°) Exemple 1

ABC est un triangle équilatéral de côté *a*.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant la propriété de projection orthogonale.



On note H le projeté orthogonal de B sur (AC).

Comme ABC est équilatéral, H est le milieu de [AC].

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= AH \times AC$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens)

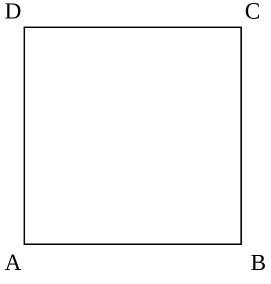
$= \frac{a}{2} \times a$

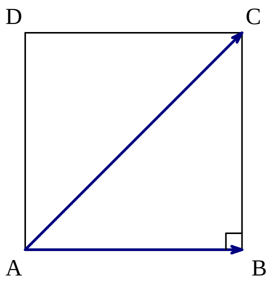
$= \frac{a^2}{2}$

2°) Exemple 2

ABCD est un carré de côté *a*.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant la propriété de projection orthogonale.





$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ car B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) (du fait que ABCD est un carré)

$= \overrightarrow{AB}^2$ (définition du carré scalaire d'un vecteur)

$= AB^2$ (propriété du carré scalaire d'un vecteur)

$= a^2$

3°) Bilan

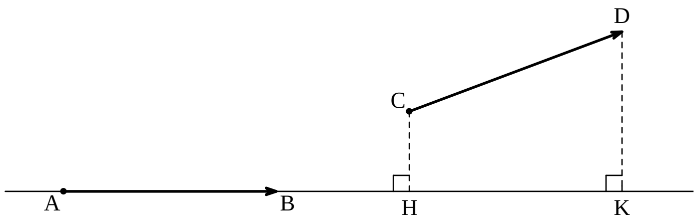
Dans ces deux exemples, nous voyons que bien que nous connaissions l'angle, il est plus facile de calculer le produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal.

VI. Projection complète

1°) Démonstration

A, B, C, D sont quatre points quelconques du plan tels que $A \neq B$.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$.



2°) Commentaires

On peut remplacer $\overrightarrow{CD}$ par $\overrightarrow{HK}$ dans le produit scalaire (on ne dit pas que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HK}$).

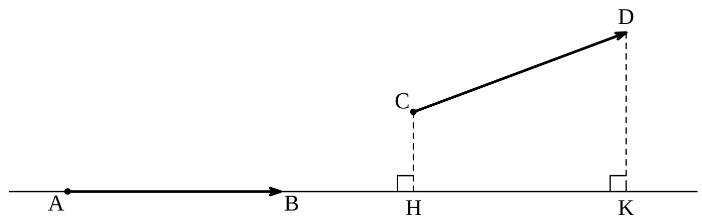
Dès qu'on a deux points, on peut les faire « descendre » sur l'autre droite.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont des vecteurs colinéaires pas forcément de même sens.

3°) Démonstration

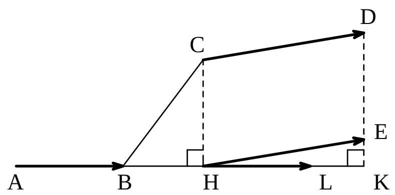
Hypothèses

On considère le point L tel que $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{AB}$.
On considère le point E tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CD}$.



• Démonstration

On considère le point L tel que $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{AB}$.
On considère le point E tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CD}$.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HL} \cdot \overrightarrow{HE}$

$= \overrightarrow{HL} \cdot \overrightarrow{HK}$

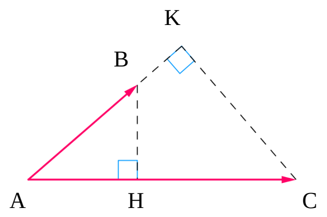
$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$

VII. Mise en garde

Attention, on ne peut pas projeter sur n'importe quelle droite du plan.
On ne peut projeter que sur 2 droites.
On n'a le droit de projeter que sur les droites formées par les vecteurs.

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, projection orthogonale possible sur la droite (AB) ou la droite (AC) (mais pas sur une autre droite).

A, B, C sont trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) et K le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



On a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AK}$.