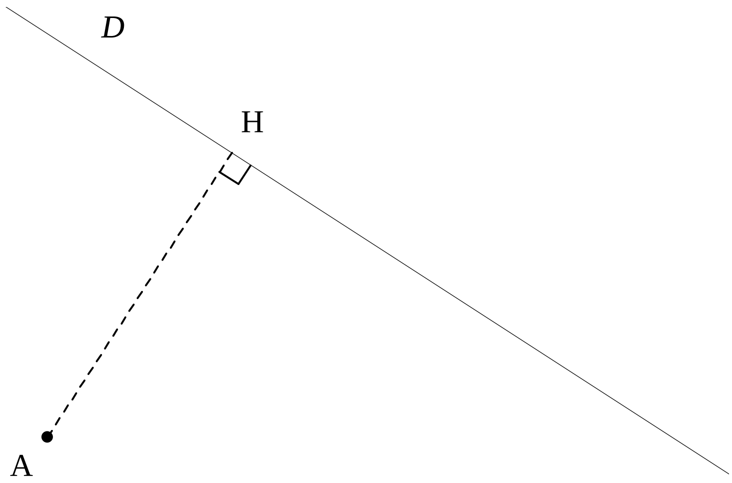
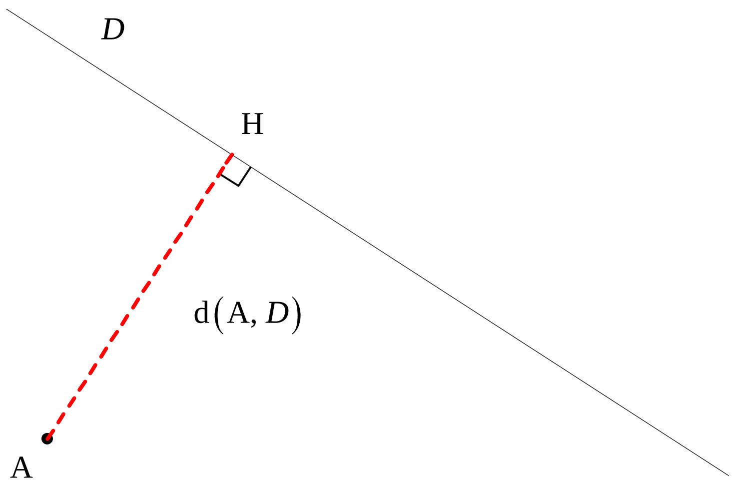
Distance d'un point à une droite

I. Définition

Soit A un point et D une droite.
On note H le *projeté orthogonal* de A sur la droite D (H est le point d'intersection de la droite D et de la droite Δ passant par A et orthogonale à D).
La distance AH est appelée **distance du point A à la droite *D***. On la note $\mathrm{d}(\mathrm{A}, D)$.

Ainsi, $\mathrm{d}(\mathrm{A}, D) = \mathrm{AH}$.





II. Propriété

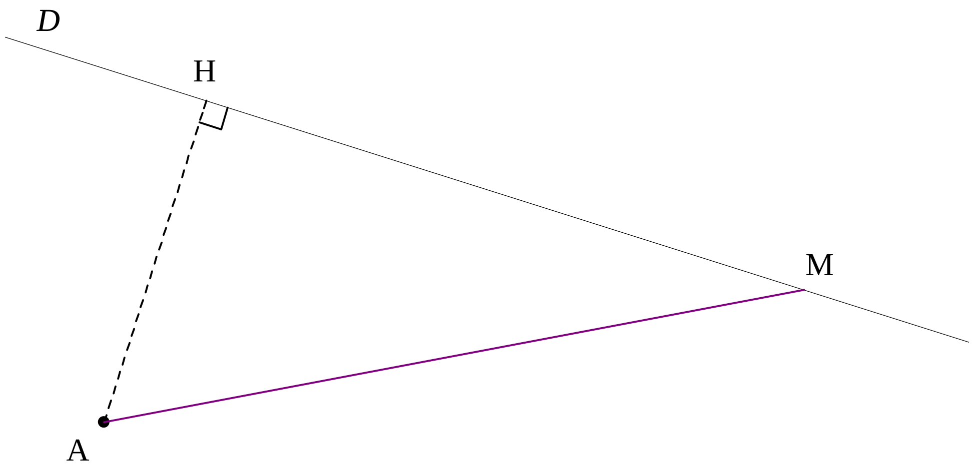
1°) Énoncé

On reprend les mêmes notations que dans la définition.

La distance du point A à la droite *D* est la plus courte distance du point A à un point de *D*.

2°) Démonstration

Nous allons démontrer que pour tout point M de *D* la distance AM est supérieure ou égale à AH.



• 1^{er} cas : $A \notin D$

1^{er} sous-cas : $M \neq H$
Dans ce cas, le triangle AMH existe bien et il est rectangle en H.
On sait que dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté.
Donc $AM > AH$.

2^{e} sous-cas : M est confondu avec H
Dans ce cas, $AM = AH$.

• 2^{e} cas : $A \in D$
Dans ce cas, A et H sont confondus.
$AH = 0$ donc $AM \geqslant AH$.

3°) Autre formulation

Le point H est le point de *D* le plus proche de A.

III. Position relative d'un cercle et d'une droite

Propriété

Énoncé :

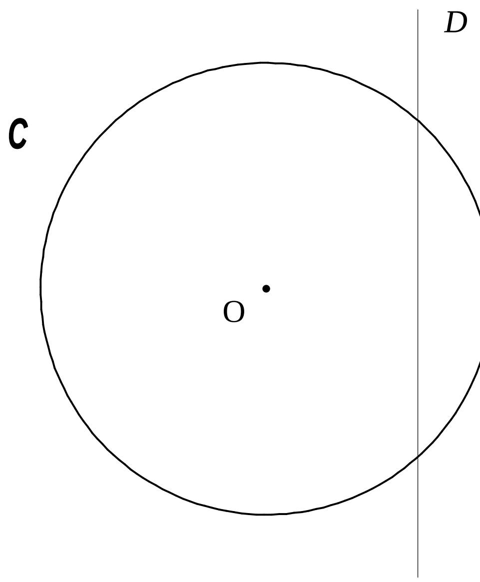
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r.
Soit D une droite.

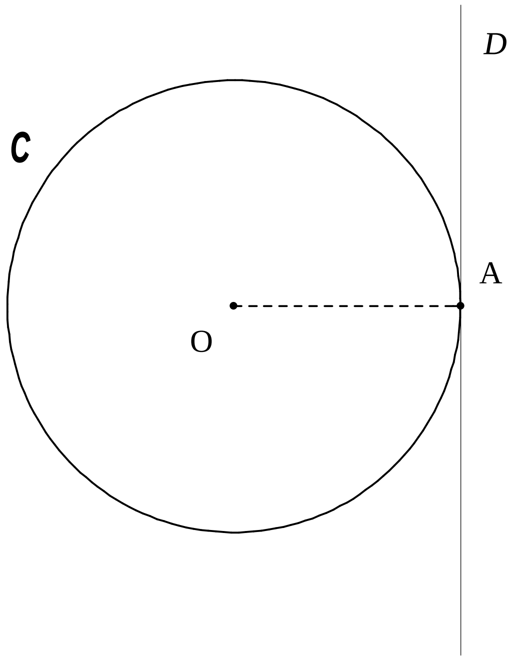
1er cas : $\mathrm{d}(\mathrm{O}, D) < r$

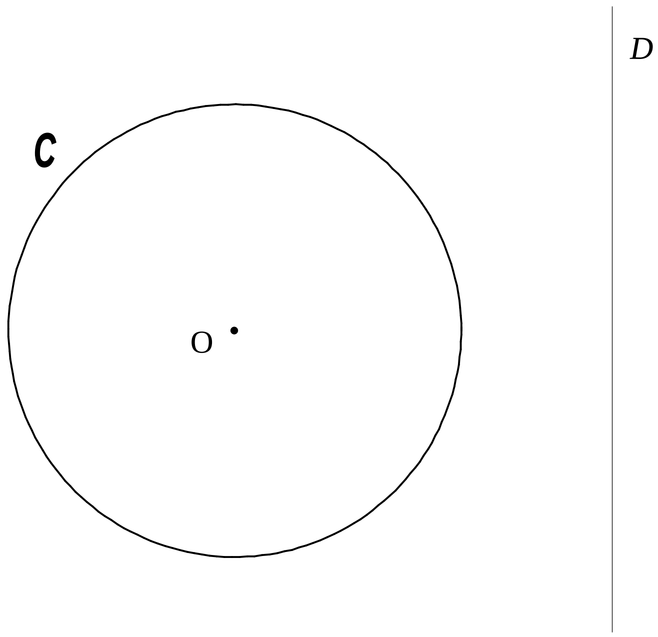
Dans ce cas, l'intersection de $\mathcal{C}$ et de D est constituée de deux points distincts.

2e cas : $\mathrm{d}(\mathrm{O}, D) = r$
Dans ce cas, l'intersection de $\mathcal{C}$ et de D est constituée d'un seul point ; la droite D est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

3e cas : $\mathrm{d}(\mathrm{O}, D) > r$
Dans ce cas, l'intersection de $\mathcal{C}$ et de D est vide.







IV. Ensemble des points M situés à une distance donnée d'une droite donnée

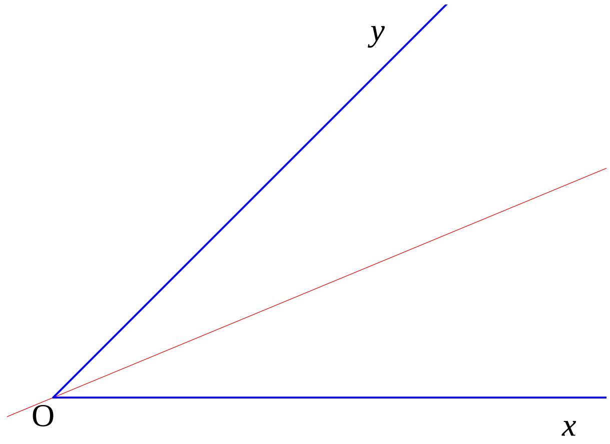
Propriété :

Soit *D* une droite fixée.
Soit *a* un réel strictement positif fixé.
L'ensemble des points M du plan tel que $\mathrm{d}(\mathrm{M},\ D) = a$ est la réunion de deux droites parallèles à *D*.

V. Bissectrice d’un angle

Définition

La bissectrice d’un angle $\widehat{xOy}$ est la droite (ou demi-droite) passant par O qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.



Propriété

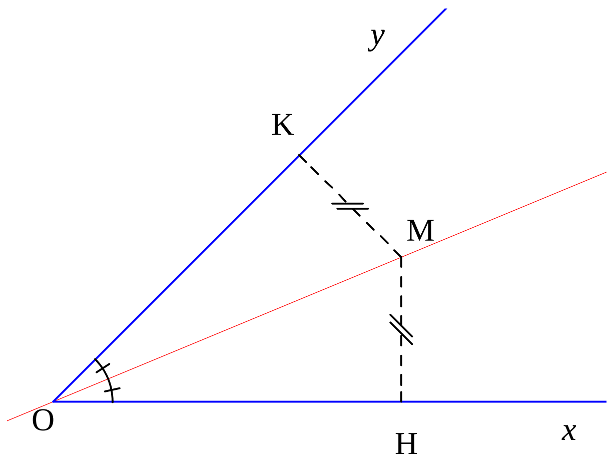
La bissectrice d’un angle est un axe de symétrie de l’angle.

Propriété de distances

Si un point appartient à la bissectrice d’un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.

Soit $\widehat{xOy}$ un angle.
On note [O*u*) la bissectrice de cet angle.

Soit M un point quelconque de [O*u*).
On note H le projeté orthogonal sur (O*x*) et K le projeté orthogonal sur (O*y*).

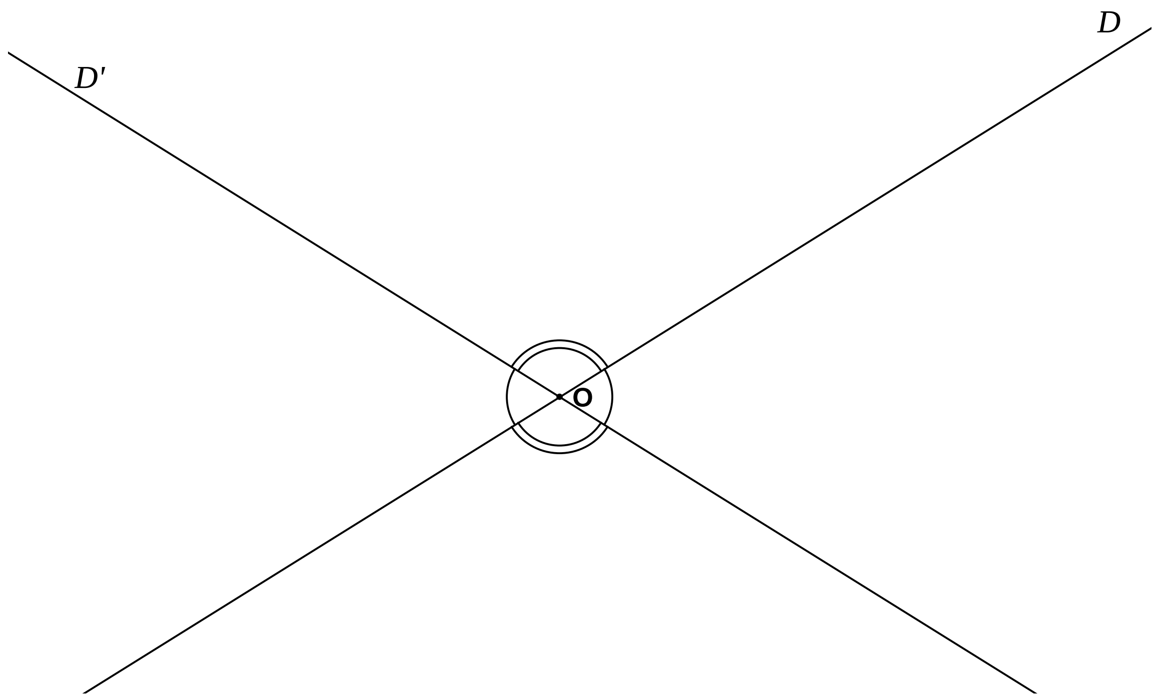


On a : $\text{MH} = \text{MK}$.

VI. Angles définis par deux droites sécantes

Définition

> Soit D et D' deux droites sécantes en O.
> Ces deux droites définissent 4 angles de sommet O. On dit qu'il s'agit des angles définis par les droites D et D'. Ces angles sont deux à deux opposés par le sommet. Ils ont donc la même mesure.



Propriété 1

Énoncé :

Les bissectrices des angles formés par de droites sécantes sont orthogonales.

Démonstration :

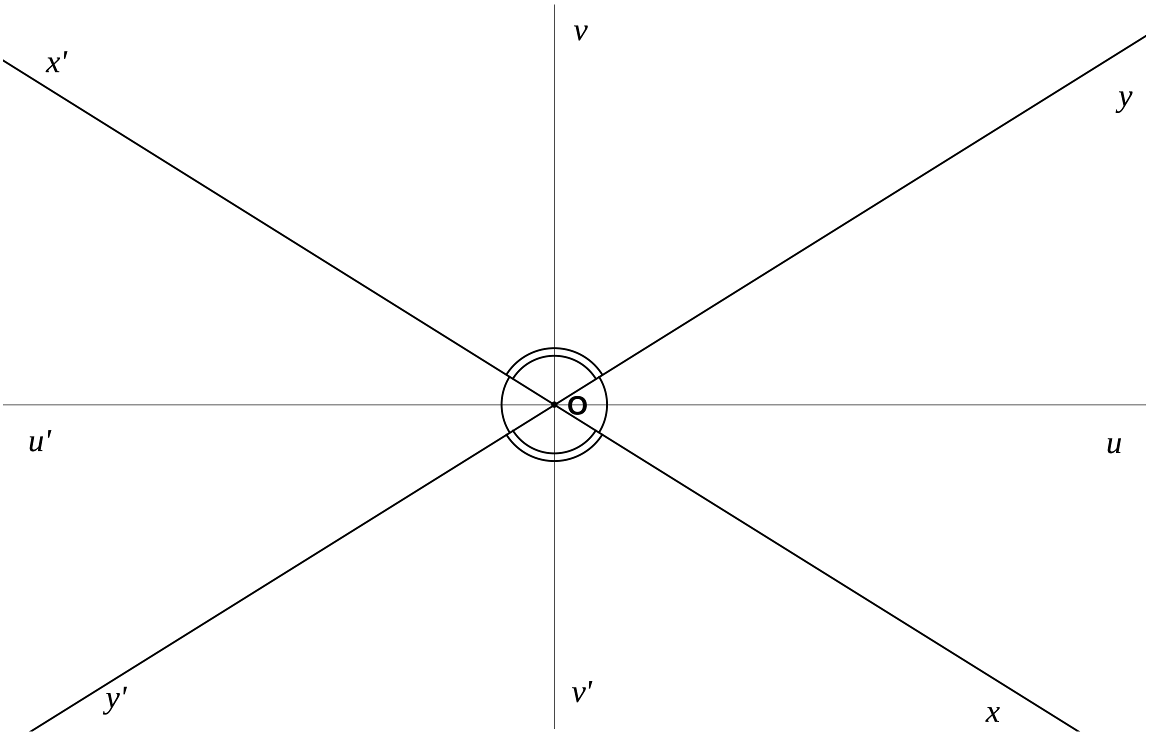
On note (xx') la droite D ; on note (yy') la droite D'.

On note $[\mathrm{O}u)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$.

On note $[\mathrm{O}u')$ la bissectrice de l'angle $\widehat{x'\mathrm{O}y'}$.

On note $[\mathrm{O}v)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{x'\mathrm{O}y}$.

On note $[\mathrm{O}v')$ la bissectrice de l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y'}$.



On note α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$ et β la mesure en degrés de l'angle $\widehat{x'\mathrm{O}y}$.

On a $\alpha+\beta=180$; donc $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=90$; par conséquent les droites (uu') et $(u'v)$ sont orthogonales.

Propriété 2

Les bissectrices des angles formés par deux droites sécantes D et D' sont les axes de symétrie de l'ensemble $E=D\cup D'$.

VII. Ensemble des points équidistants de deux droites

Soit D et D' deux droites du plan.
On cherche l'ensemble des points équidistants de D et D'.

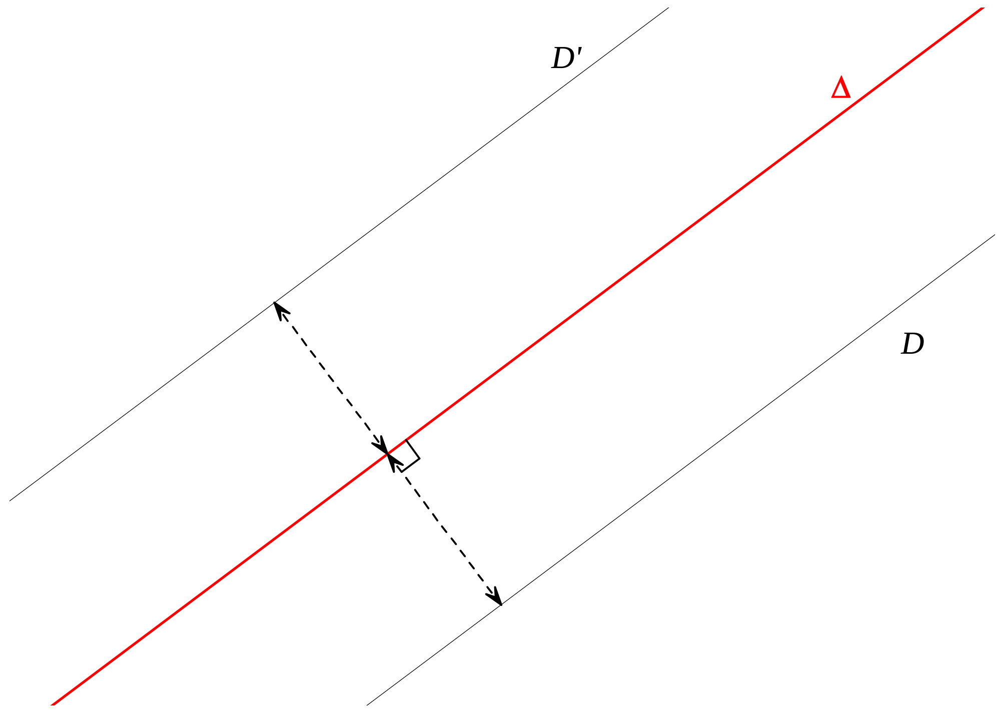
Propriété :

1er cas : droites sécantes

Soit D et D' deux droites sécantes.
L'ensemble des points équidistants de D et D' est la réunion des bissectrices des angles formés par D et D'.

2e cas : deux droites strictement parallèles

Soit D et D' deux droites strictement parallèles. L'ensemble des points équidistants de D et D' est une droite Δ. Cette droite est l'axe médian de la bande de plan formé par les droites D et D'.



On appelle **bande** de plan la région du plan comprise entre deux droites strictement parallèles.

Exemple :

Un parallélogramme est l'intersection de deux bandes de plan

VIII. Démonstration du fait que les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes