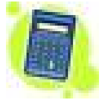
TS1

Contrôle du jeudi 12 février 2015 (3 heures)



Les exercices **I** et **IV** doivent être traités sur la feuille de réponses à rendre dans la copie.
Il n'y a rien à justifier sur la copie.

Partie obligatoire

I. (4 points)

On s'intéresse à la mise en bocal de fruits au sirop. L'étiquette indique une masse de 500 grammes. On considère qu'un bocal est mal rempli s'il pèse moins de 485 grammes.

Partie 1

Les bocaux sont remplis sur deux chaînes de travail A et B. La chaîne A fournit 80 % des bocaux, la chaîne B le reste. On sait que les bocaux produits par la chaîne A sont 1 % à être mal remplis et ceux de la chaîne B sont 7 % à être mal remplis. On prélève au hasard un bocal dans la production.

1°) Calculer la probabilité que le bocal soit mal rempli. On donnera le résultat sous forme décimale.

2°) Quelle est la probabilité qu'un bocal mal rempli provienne de la chaîne A ?
On donnera le résultat en fraction irréductible.

Partie 2

En améliorant la chaîne B, le service qualité aimerait que la probabilité qu'un bocal pris au hasard dans la production soit mal rempli soit égale à 0,02.

Quelle devra être la probabilité qu'un bocal fourni par B prélevé au hasard soit mal rempli ?
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

Partie 3

En améliorant la chaîne B, le service qualité est parvenu à ce que le pourcentage de bocaux mal remplis soit de 2 %.
On teste un lot de 200 bocaux prélevés sur la production (on considère qu'il s'agit de tirages avec remise indépendants).

Calculer la probabilité qu'au moins 5 boîtes soient mal remplies.
On donnera la valeur arrondie au millième.

II. (2 points)

On se propose de résoudre l'équation $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=1$ (E) d'inconnue $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}>1$.

On rappelle que pour tout réel $a\in\left]0\,;1\right[$, on a : $\sqrt{a}>a^2$.

2°) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

III. (3 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit z un nombre complexe non nul. On note M, M', M'' les points d'affixes respectives z, $\dfrac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z}{2}$ et $\overline{z}$.

Il est demandé de ne pas utiliser la forme algébrique de z sauf dans la question 3°) où l'on posera $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

1°) Démontrer que les points M, M', M'' sont situés sur un même cercle de centre O.

2°) Démontrer que l'on a : $\mathrm{MM}'=\mathrm{OM}$.

3°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\mathrm{MM}''=\mathrm{OM}$.

On rédigera la recherche de l'ensemble E sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

IV. (4 points)

Donner le domaine de résolution de chacune des équations et inéquations suivantes puis les résoudre.

1°) $\ln(2x-2)+\ln(x+2)=3\ln 2$ (1)

2°) $\ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)=0$ (2)

3°) $2\ln(2x-1)-\ln(5-2x)-\ln 2\leqslant 0$ (3)

4°) $(\ln x)^2-2\ln x\leqslant 3$ (4)

V. (7 points)

Partie 1

On considère la fonction $g : x \mapsto (1-x)e^x - 2$.

1°) Calculer $g'(x)$.

2°) Dresser le tableau de variations de *g* (sans les limites).

3°) En déduire le signe de $g(x)$. On expliquera brièvement.

Partie 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq \ln 2$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 2)^2}$ (on se contentera d'écrire deux ou trois lignes de calcul).

2°) À l'aide du résultat final de la partie 1, dresser le tableau de variations de *f*.

3°) Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

On rappelle les résultats suivants :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Compléter le tableau de variations de la question 2°).

4°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Pour tout réel *m*, on note D_m la droite d'équation $y = mx$. La droite D_m passe par le point O qui est situé sur la courbe $\mathcal{C}$.
Déterminer l'ensemble des valeurs de *m* pour lesquelles la droite D_m recoupe $\mathcal{C}$ en un autre point.

Partie spécialité

I. (10 points)

1°) On considère l'équation $221x - 331y = 1$ (E) où *x* et *y* sont des entiers relatifs.

Déterminer l'ensemble des couples (*x* ; *y*) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Indication : on pourra vérifier que le couple (3 ; 2) est une solution de l'équation (E).

2°) On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) ainsi définies :

- (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 221 ;
- (v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 331.

Déterminer tous les couples $(p\,;q)$ d'entiers naturels tels que $u_p = v_q$, $0 \leqslant p \leqslant 500$ et $0 \leqslant q \leqslant 500$.

II. (10 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $a_n = 49 \times 10^n$.

1°) Déterminer la décomposition en facteurs premiers de a_n.

2°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de a_n en fonction de *n*.

3°) Déterminer pour quelle valeur de *n* le nombre a_n possède 108 diviseurs positifs.
Pour la valeur de *n* ainsi trouvée, calculer la somme de tous ces diviseurs.

4°) Déterminer le reste de la division euclidienne de a_{2015} par 11.

TS1

Feuille à remettre dans la copie d'enseignement obligatoire

Nom :……………………………………………………….……..   Prénom :…………………………..…

I. (4 points)

Partie 1

1°) ………………… (un seul résultat, sans égalité)   2°) ………………… (un seul résultat, sans égalité)

Partie 2

………………… (un seul résultat, sans égalité)

Partie 3

………………… (un seul résultat, sans égalité)

IV. (4 points)

1°) $\ln(2x-2)+\ln(x+2)=3\ln 2$ (1)

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_1=$……………………

2°) $\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0$ (2)

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_2=$……………………

3°) $2\ln(2x-1)-\ln(5-2x)-\ln 2\leqslant 0$ (3)

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_3=$……………………

4°) $(\ln x)^2-2\ln x\leqslant 3$ (4)

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_4=$……………………

Corrigé de la feuille de réponses

I.

Partie 1

1°) 0,022 (un seul résultat, sans égalité)   2°) $\frac{4}{11}$ (un seul résultat, sans égalité)

Partie 2

0,06 (un seul résultat, sans égalité)

Partie 3

0,371 (un seul résultat, sans égalité)

IV. (4 points)

1°) $\ln(2x-2)+\ln(x+2)=3\ln 2$ (1)

domaine de résolution : $\left]1\,;+\infty\right[$; ensemble des solutions : $S_1=\{2\}$

2°) $\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0$ (2)

domaine de résolution : $\left]0\,;1\right[$; ensemble des solutions : $S_2=\left\{\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$

3°) $2\ln(2x-1)-\ln(5-2x)-\ln 2\leqslant 0$ (3)

domaine de résolution : $\left]\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right[$; ensemble des solutions : $S_3=\left]\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right]$

4°) $(\ln x)^2-2\ln x\leqslant 3$ (4)

domaine de résolution : $\mathbb{R}_+^*$; ensemble des solutions : $S_4=\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}^3\right]$

Corrigé du contrôle du 12-2-2015

Partie obligatoire

I.

On s'intéresse à la mise en bocal de fruits au sirop. L'étiquette indique une masse de 500 grammes. On considère qu'un bocal est mal rempli s'il pèse moins de 485 grammes.

Partie 1

Les bocaux sont remplis sur deux chaînes de travail A et B. La chaîne A fournit 80 % des bocaux, la chaîne B le reste. On sait que les bocaux produits par la chaîne A sont 1 % à être mal remplis et ceux de la chaîne B sont 7 % à être mal remplis. On prélève au hasard un bocal dans la production.

1°) Calculer la probabilité que le bocal soit mal rempli. On donnera le résultat sous forme décimale.

On note
R l'événement : « le bocal est mal rempli » ;
A l'événement : « le bocal a été produit par la chaîne A » ;
B l'événement « le bocal a été produit par la chaîne B ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{R}) &= P(\mathrm{A}\cap\mathrm{R})+P(\mathrm{B}\cap\mathrm{R}) \\ &= 0,8\times 0,01+0,2\times 0,07 \\ &= 0,022 \end{aligned}$$

2°) Quelle est la probabilité qu'un bocal mal rempli provienne de la chaîne A ?
On donnera le résultat en fraction irréductible.

$$\begin{aligned} P(\mathrm{A}/\mathrm{R}) &= \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{R})}{P(\mathrm{R})} \\ &= \frac{0,008}{0,022} \\ &= \frac{8}{22} \\ &= \frac{4}{11} \end{aligned}$$

Partie 2

En améliorant la chaîne B, le service qualité aimerait que la probabilité qu'un bocal pris au hasard dans la production soit mal rempli soit égale à 0,02.

Quelle devra être la probabilité qu'un bocal fourni par B prélevé au hasard soit mal rempli ?
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

Soit x la probabilité de prélever un bocal mal repli dans la chaîne B.

On a : $P(\mathrm{R})=0,8\times 0,01+0,2\times x$ d'où $0,02=0,008+0,2\times x$.

Donc $x=0,06$.

Partie 3

En améliorant la chaîne B, le service qualité est parvenu à ce que le pourcentage de bocaux mal remplis soit de 2 %. On teste un lot de 200 bocaux prélevés sur la production (on considère qu'il s'agit de tirages avec remise indépendants).

Calculer la probabilité qu'au moins 5 boîtes soient mal remplies.
On donnera la valeur arrondie au millième.

On note X le nombre de boîtes mal remplies.
X suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,02.

On cherche $P(\mathrm{X}\geqslant 5)$.

On transforme afin d'utilise la fonction de répartition de X grâce à la calculatrice.

$$P(\mathrm{X}\geqslant 5)=1-P(\mathrm{X}\leqslant 4)$$

Avec la calculatrice, on trouve $P(\mathrm{X}\geqslant 5)=0,371156417...$

II.

On se propose de résoudre l'équation $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=1$ (E) d'inconnue $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}>1$.

On rappelle que pour tout réel $a\in\left]0\,;1\right[$, on a : $\sqrt{a}>a^2$.

$\forall x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\qquad 0<\cos x<1$ et $0<\sin x<1$

Donc $\forall x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\qquad \sqrt{\cos x}>\cos^2 x$ (1) et $\sqrt{\sin x}>\sin^2 x$ (2).

Par addition membre à membre des inégalités (1à et (2), on obtient :

$\forall x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\qquad \sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}>\cos^2 x+\sin^2 x$ soit $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}>1$.

2°) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

D'après la question précédente, aucun réel de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ n'est solution de (E).

Or $\sqrt{\cos 0}+\sqrt{\sin 0}=\sqrt{1}+\sqrt{0}=1$ et $\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}=\sqrt{0}+\sqrt{1}=1$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $S=\left\{0\,;\frac{\pi}{2}\right\}$.

III.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit z un nombre complexe non nul. On note M, M', M'' les points d'affixes respectives z, $\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z}{2}$ et $\bar{z}$.

Il est demandé de ne pas utiliser la forme algébrique de z sauf dans la question 3°) où l'on posera $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

1°) Démontrer que les points M, M', M'' sont situés sur un même cercle de centre O.

On calcule les distances OM, OM', OM''.

$\mathrm{OM}=|z|$

$$\begin{aligned}\mathrm{OM}'&=\left|\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z}{2}\right|\\&=\frac{\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right|\times|z|}{2}\\&=\frac{\sqrt{1+3}\times|z|}{2}\\&=\frac{2\times|z|}{2}\\&=|z|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{OM}''&=|\bar{z}|\\&=|z|\end{aligned}$$

On constate que $\mathrm{OM}=\mathrm{OM}'=\mathrm{OM}''$ donc les points M, M', M'' sont situés sur un même cercle de centre O.

2°) Démontrer que l'on a : $\mathrm{MM}'=\mathrm{OM}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{MM}'&=\left|\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z}{2}-z\right|\\&=\left|\frac{\left(\mathrm{i}\sqrt{3}-1\right)z}{2}\right|\\&=\frac{\left|\mathrm{i}\sqrt{3}-1\right|\times|z|}{2}\\&=|z|\\&=\mathrm{OM}\end{aligned}$$

3°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\mathrm{MM}''=\mathrm{OM}$.

On rédigera la recherche de l'ensemble E sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in E&\Leftrightarrow \mathrm{MM}''=\mathrm{OM}\\&\Leftrightarrow |\bar{z}-z|=|z|\\&\Leftrightarrow |-2\mathrm{i}y|=\sqrt{x^2+y^2}\\&\Leftrightarrow 2|y|=\sqrt{x^2+y^2}\\&\Leftrightarrow 4y^2=x^2+y^2\\&\Leftrightarrow x^2-3y^2=0\\&\Leftrightarrow \left(x-y\sqrt{3}\right)\left(x+y\sqrt{3}\right)=0\\&\Leftrightarrow x-y\sqrt{3}=0 \quad\text{ou}\quad x+y\sqrt{3}=0\end{aligned}$$

L'ensemble E est donc la réunion des droites d'équations $x-y\sqrt{3}=0$ ou $x+y\sqrt{3}=0$.

IV.

Donner le domaine de résolution de chacune des équations et inéquations suivantes puis les résoudre.

1°) $\ln(2x-2)+\ln(x+2)=3\ln 2 \quad (1)$

Conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases}2x-2>0\\x+2>0\end{cases}$ ce qui est successivement équivalent à :

$\begin{cases}x>1\\x>-2\end{cases}$

$x>1$

On résout l'équation (1) dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

$(1) \Leftrightarrow (2x-2)(x+2)=8$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=8$

$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-3$ (impossible compte tenu de l'ensemble de résolution)

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1=\{2\}$.

2°) $\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0$ (2)

Conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases} x\neq 0 \\ \frac{1}{x}>0 \\ \ln\frac{1}{x}>0 \end{cases}$ ce qui est successivement équivalent à :

$\begin{cases} x>0 \\ -\ln x>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ \ln x<0 \end{cases}$

$0<x<1$

On résout l'équation (2) dans l'intervalle $]0\,;1[$.

$(2) \Leftrightarrow \ln\frac{1}{x}=1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\mathrm{e}$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\mathrm{e}}$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=\left\{\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$.

3°) $2\ln(2x-1)-\ln(5-2x)-\ln 2\leqslant 0$ (3)

Conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases} 2x-1>0 \\ 5-2x>0 \end{cases}$ ce qui est successivement équivalent à :

$\begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x<\frac{5}{2} \end{cases}$

$\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$

On résout l'inéquation (3) dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right[$.

$(3) \Leftrightarrow \ln\left[(2x-1)^2\right]\leqslant \ln(5-2x)+\ln 2$

$\Leftrightarrow \ln\left[(2x-1)^2\right]\leqslant \ln\left[2(5-2x)\right]$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2\leqslant 2(5-2x)$

$\Leftrightarrow 4x^2\cancel{-4x}+1\leqslant 10\cancel{-4x}$

$\Leftrightarrow 4x^2\leqslant 9$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}$

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3=\left]\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right]$.

4°) $(\ln x)^2-2\ln x\leqslant 3$ (4)

Condition d'existence :

On doit avoir $x>0$.

On résout l'inéquation (4) dans $\mathbb{R}_+^*$

On pose $X=\ln x$.

(4) s'écrit alors $X^2-2X\leqslant 3$ $(4')$.

$(4') \Leftrightarrow X^2-2X-3\leqslant 0$

$\Leftrightarrow -1\leqslant X\leqslant 3$

Or $X=\ln x$.

Donc

$(4) \Leftrightarrow -1\leqslant \ln x\leqslant 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^3$

L'ensemble des solutions de (4) est $S_4=\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}^3\right]$.

V.

Partie 1

On considère la fonction $g : x \mapsto (1-x)\text{e}^x - 2$.

1°) Calculer $g'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \text{e}^x(1-x) + \text{e}^x \times (-1)$$
$$= -x\,\text{e}^x$$

2°) Dresser le tableau de variations de g (sans les limites).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
SGN de $-x$		$+$	0	$-$	
SGN de e^x		$+$		$+$	
SGN de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

$g(0) = -1$

3°)

Le maximum de g sur $\mathbb{R}$ est égal à – 1, atteint en 0.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leqslant -1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) < 0$.

Partie 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\text{e}^x - 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq \ln 2$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\text{e}^x - 2)^2}$ (on se contentera d'écrire deux ou trois lignes de calcul).

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\} \quad f'(x) = \frac{-\text{e}^x \times x + 1 \times (\text{e}^x - 2)}{(\text{e}^x - 2)^2}$$
$$= \frac{\text{e}^x \times (1-x) - 2}{(\text{e}^x - 2)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(\text{e}^x - 2)^2}$$

2°) À l'aide du résultat final de la partie 1, dresser le tableau de variations de *f*.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	
Signe de $(\text{e}^x - 2)^2$		$+$	$0^{\text{déno}}$	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	0

3°) Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

On rappelle les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \text{e}^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{e}^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{e}^x}{x} = +\infty$$

Compléter le tableau de variations de la question 2°).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (\text{e}^x - 2) = -2 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (\ln 2)^+} x = \ln 2 \\ \lim\limits_{x \to (\ln 2)^+} (\text{e}^x - 2) = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x \to (\ln 2)^+} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (\ln 2)^-} x = \ln 2 \\ \lim\limits_{x \to (\ln 2)^-} (\text{e}^x - 2) = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x \to (\ln 2)^-} f(x) = -\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\ln 2\} \quad f(x)=\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{1-\frac{2}{e^x}}$$

$$=\frac{1}{\frac{e^x}{x}}\times\frac{1}{1-\frac{2}{e^x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$.

3°) Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

On rappelle les résultats suivants :

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

Compléter le tableau de variations de la question 2°).

f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$. Il convient d'étudier les limites de *f* lorsque *x* tend vers $-\infty$, ln 2, $+\infty$.

En ln 2, nous serons obligés de calculer les limites à gauche et à droite.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2\right)=-2\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+}x=\ln 2\\ \lim\limits_{x\to(\ln 2)^+}\left(e^x-2\right)=0^+\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to(\ln 2)^+}f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\ln 2)^-}x=\ln 2\\ \lim\limits_{x\to(\ln 2)^-}\left(e^x-2\right)=0^-\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to(\ln 2)^-}f(x)=-\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\ln 2\} \quad f(x)=\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{1-\frac{2}{e^x}}$$

$$=\frac{1}{\frac{e^x}{x}}\times\frac{1}{1-\frac{2}{e^x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ (limite de référence rappelée dans l'énoncé) donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{e^x}}=1$$

Donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

On complète le tableau de variation de la question précédente.
On voit qu'il n'y a pas d'incohérences entre les variations et les limites calculées.

On vérifie également toutes les limites obtenues grâce à la courbe représentative de f obtenue sur la calculatrice graphique.

4°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Pour tout réel *m*, on note D_m la droite d'équation $y=mx$. La droite D_m passe par le point O qui est situé sur la courbe $\mathcal{C}$.
Déterminer l'ensemble des valeurs de *m* pour lesquelles la droite D_m recoupe $\mathcal{C}$ en un autre point.

On résout l'équation $f(x)=mx \quad (1)$ dans $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x-2}=mx\\ &\Leftrightarrow x-mx\left(e^x-2\right)=0\\ &\Leftrightarrow x\left[1-m\left(e^x-2\right)\right]=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 1-m\left(e^x-2\right)=0 \quad (1')\end{aligned}$$

On s'intéresse dorénavant à l'équation $(1')$.

$$\begin{aligned}(1') &\Leftrightarrow 1=me^x-2m\\ &\Leftrightarrow me^x=1+2m \quad (1'')\end{aligned}$$

1er cas : $m\neq 0$

Dans ce cas, $(1'')\Leftrightarrow e^x=\frac{2m+1}{m} \quad (1''')$.

$(1''')$ admet une solution si et seulement si $\frac{2m+1}{m}>0$ c'est-à-dire $m\in\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$.

Cette solution est égale à $\ln\left(\frac{2m+1}{m}\right)$.

On peut noter que cette solution est différente de 0 pour $m\neq -1$ (il faut résoudre l'équation $\ln\left(\frac{2m+1}{m}\right)=0$ ce qui est très facile).

2e cas : $m=0$

Dans ce cas, $(1'')\Leftrightarrow 0=1$ (impossible).

En conclusion, l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles la droite D_m recoupe $\mathcal{C}$ en un autre point est

$\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$.

Corrigé de la partie spécialité

I.

1°) On considère l'équation $221x-331y=1$ (E) où x et y sont des entiers relatifs.

Déterminer l'ensemble des couples (x ; y) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Indication : on pourra vérifier que le couple (3 ; 2) est une solution de l'équation (E).

Le couple (3 ; 2) est une solution particulière de l'équation (E).
En effet, $221\times3-331\times2=1$.

$$\begin{aligned}\text{(E)} &\Leftrightarrow 221x-331y=221\times3-331\times2\\ &\Leftrightarrow 221x-221\times3=331y-331\times2\\ &\Leftrightarrow 221(x-3)=331(y-2)\ \text{(E')}\end{aligned}$$

On en déduit que $221 \mid 331(y-2)$
Or 221 et 331 sont premiers entre eux car $221\times3-331\times2=1$ (théorème de Bezout).
Donc d'après le théorème de Gauss, $221 \mid y-2$.

Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y-2=k\times221$ soit $y=2+221k$.

On remplace $y-2$ par $221k$ dans (E').

On obtient : $\cancel{221}(x-3)=331\times\cancel{221}k$.

D'où $x=3+331k$.

On vérifie que le couple $(3+331k\,;2+221k)$ est solution de (E).

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{(3+331k\,;2+221k),k\in\mathbb{Z}\}$.

2°) On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) ainsi définies :

- (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0=2$ et de raison 221 ;
- (v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0=3$ et de raison 331.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2+221n$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=3+331n$

Déterminer tous les couples $(p\,;q)$ d'entiers naturels tels que $u_p=v_q$, $0\leqslant p\leqslant500$ et $0\leqslant q\leqslant500$.
On cherche les couples $(p\,;q)\in\mathbb{N}^2$ tels que $u_p=v_q$ (1), $0\leqslant p\leqslant500$ (2) et $0\leqslant q\leqslant500$ (3).

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2+221p=3+331q\\ &\Leftrightarrow 221p-331q=1\end{aligned}$$

D'après la partie 1, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $p=331k+3$ et $q=221k+2$.

Les conditions (2) et (3) imposent $k=0$ ou $k=1$.

On peut aussi traduire les conditions (2) et (3) sous la forme d'inéquations.

Cela n'est cependant pas utile vu la simplicité de ces deux conditions.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow 0\leqslant331k+3\leqslant500\\ &\Leftrightarrow -3\leqslant331k\leqslant497\\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{331}\leqslant k\leqslant\frac{497}{331}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow 0\leqslant221k+2\leqslant500\\ &\Leftrightarrow -2\leqslant221k\leqslant498\\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{221}\leqslant k\leqslant\frac{498}{221}\end{aligned}$$

Ainsi k peut prendre les valeurs 0 et 1.

Donc il y a deux cas :

1$^{\text{er}}$ cas : $k=0$

Dans ce cas, $p=331\times0+3=3$ et $q=221\times0+2=2$.

2$^{\text{e}}$ cas : $k=1$

Dans ce cas, $p=331\times1+3=334$ et $q=221\times1+2=223$.

Conclusion :

Les couples $(p\,;q)\in\mathbb{N}^2$ tels que $u_p=v_q$, $0\leqslant p\leqslant500$ et $0\leqslant q\leqslant500$ sont (3 ; 2) et (334 ; 223).

II.

Pour tout entier naturel $n\geqslant1$, on pose $a_n=49\times10^n$.

1°) Déterminer la décomposition en facteurs premiers de a_n.

$$\begin{aligned}a_n&=49\times10^n\\ &=7^2\times(2\times5)^n\\ &=2^n\times5^n\times7^2\end{aligned}$$

Les exposants sont tous supérieurs ou égaux à 1 donc il s'agit bien de la décomposition en facteurs premiers de a_n.

2°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de a_n en fonction de *n*.

Soit N le nombre de diviseurs positifs de a_n.

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= (n+1)(n+1)(2+1) \\ &= 3(n+1)^2 \end{aligned}$$

3°) Déterminer pour quelle valeur de *n* le nombre a_n possède 108 diviseurs positifs.

On cherche *n* tel que $3(n+1)^2 = 108$ (1).

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (n+1)^2 = 36. \\ &\Leftrightarrow n+1 = 6 \\ &\Leftrightarrow n = 5 \end{aligned}$$

Pour la valeur de *n* ainsi trouvée, calculer la somme de tous ces diviseurs.

$a_5 = 2^5 \times 5^5 \times 7^2$

Les diviseurs positifs de a_5 sont les entiers de la forme $a_5 = 2^{\alpha_1} \times 5^{\alpha_2} \times 7^{\alpha_3}$ où α_1, α_2, α_3 sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 2$, $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 5$, $0 \leqslant \alpha_3 \leqslant 5$.

Soit S la somme des diviseurs positifs de a_5.

$$\begin{aligned} S &= \left(\sum_{\alpha_1=0}^{5} 2^{\alpha_1}\right) \times \left(\sum_{\alpha_2=0}^{5} 5^{\alpha_2}\right) \times \left(\sum_{\alpha_3=0}^{2} 7^{\alpha_3}\right) \\ &= \left(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5\right) \times \left(7^0+7^1+7^2\right) \times \left(5^0+5^1+5^2+5^3+5^4+5^5\right) \\ &= 63 \times 3906 \times 57 \\ &= 14\,026\,446 \end{aligned}$$

La somme de tous les diviseurs positifs de a_5 est égale à 14 026 446.

4°) Déterminer le reste de la division euclidienne de a_{2015} par 11.

On a : $a_{2015} = 10^{2015} \times 49$.

$10 \equiv -1$ (mod. 11) donc $10^{2015} \equiv (-1)^{2015}$ (mod. 11) d'où $10^{2015} \equiv -1$ (mod. 11)

De plus, $49 \equiv 5$ (mod. 11).

Par produit, on obtient $a_{2015} \equiv -5$ (mod. 11).
D'où $a_{2015} \equiv 6$ (mod. 11).

Conclusion :

Le reste de la division euclidienne de a_{2015} par 11 est 6.