Équations fonctionnelles

I. Équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$

Il s'agit de déterminer **toutes** les fonctions *f* continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Il s'agit d'une *équation fonctionnelle*. La relation « $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)+f(y)$ » est appelée *relation fonctionnelle*.

On s'aperçoit aisément que toutes les fonctions linéaires $x \mapsto ax$ vérifient la condition.
En revanche, les fonctions cos, sin, exp, ln ne vérifient pas cette condition.

Nous allons démontrer que les seules fonctions qui vérifient la condition sont les fonctions linéaires.

Méthode :

On considère une fonction *f* qui vérifie la condition.

Dans un premier temps, on commence par dégager des propriétés de *f*.

Dans un deuxième temps on détermine l'expression de *f* pour les entiers naturels, puis pour les entiers relatifs, puis enfin pour les nombres rationnels.

Dans un troisième temps, on détermine l'expression de *f* pour tous les réels en utilisant la continuité et enfin on conclut.

Le but de notre travail va être de démontrer que les seules fonctions qui vérifient la condition sont les fonctions linéaires.

On considère une fonction *f* continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)+f(y)$.

On commence par déterminer $f(0)$.

D'après la relation fonctionnelle appliquée à $x=0$ et $y=0$, on a : $f(0+0)=f(0)+f(0)$ soit $f(0)=f(0)+f(0)$ donc en simplifiant, $f(0)=0$.

On démontre que *f* est impaire.

D'après la relation fonctionnelle, $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(0)=f(x)+f(-x)$.

Par suite, $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 = f(x) + f(-x)$.

soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$.

Déterminons l'expression de *f* pour les entiers naturels.

On va poser $a = f(1)$.

$f(2) = f(1) + f(1) = 2a$

$f(3) = 3a$

Par récurrence, on démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f(n) = an$.

Déterminons l'expression de *f* pour les entiers négatifs (passage à $\mathbb{Z}$).

Comme *f* est impaire, $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f(-n) = -f(n) = -an$.

Donc $\forall\, p \in \mathbb{Z} \quad f(p) = ap$.

Déterminons l'expression de *f* pour les nombres rationnels (passage à $\mathbb{Q}$).

On veut démontrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = a\frac{p}{q}$.

Soit *x* un élément quelconque de $\mathbb{Q}$.

On pose $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

$$f(q \times x) = f\Big(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{q \text{ fois}}\Big)$$

Donc d'après la relation fonctionnelle, on a : $f(q \times x) = q \times f(x)$.

Or $qx = p$ donc on a : $f(p) = q \times f(x)$.

Or $f(p) = ap$ donc $f(x) = a\frac{p}{q}$.

Bilan : on a établi $\forall\, x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = ax$.

Déterminons l'expression de *f* pour les réels (passage à $\mathbb{R}$).

→ On utilise la continuité de *f*.

On admet la propriété suivante :

> Soit *f* une fonction définie continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
> Pour toute suite (u_n) qui converge vers *l*, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.

→ On utilise la propriété suivante démontrée en appendice :

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Soit x un réel quelconque.

Il existe une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers *x*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = a \times u_n$

$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

$a \times u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \times x$

Donc $f(x) = ax$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$

On aboutit donc à la conclusion : « Toute fonction continue qui vérifie la relation fonctionnelle est une fonction linéaire.

Réciproquement, on démontre aisément que toute fonction linéaire vérifie la relation fonctionnelle.

Les « solutions » de l'équation fonctionnelle sont les fonctions affines.

On peut donc énoncé la propriété générale :

Les fonctions *f* continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions linéaires.

II. Équation fonctionnelle $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

Il s'agit de déterminer **toutes** les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

→ Vérifions que toutes les fonctions affines sont solutions.

Soit $f : x \mapsto ax+b$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)=a\times\frac{x+y}{2}+b=\frac{(ax+b)+(ay+b)}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

→ Nous allons démontrer que les seules fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ sont les fonctions affines.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x)-f(0)$.

La fonction g est continue de manière évidente (différence de deux fonctions continues).

On va vérifier $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad g(x+y)=g(x)+g(y)$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$g(x+y)=f(x+y)-f(0)=f\left(\frac{2x+2y}{2}\right)-f(0)=\frac{f(2x)+f(2y)}{2}-f(0)$$

$$\begin{aligned}
g(x)+g(y)&=f(x)-f(0)+f(y)-f(0)\\
&=f(x)+f(y)-2f(0)\\
&=f\left(\frac{2x}{2}\right)+f\left(\frac{2y}{2}\right)-2f(0)\\
&=f\left(\frac{2x+0}{2}\right)+f\left(\frac{2y+0}{2}\right)-2f(0)\\
&=\frac{f(2x)+f(0)}{2}+\frac{f(2x)+f(0)}{2}-2f(0)\\
&=\frac{f(2x)+f(2y)}{2}-f(0)
\end{aligned}$$

Donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad g(x+y)=g(x)+g(y)$.

D'après le **I**, la fonction g est linéaire.
Donc il existe un réel a tel que $\forall x\in\mathbb{R} \quad g(x)=ax$.

Par suite, $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=ax+f(0)$.

On en déduit que f est affine.

Réciproquement, on vérifie aisément que toute fonction affine vérifie bien l'équation fonctionnelle.

Les « solutions » de l'équation fonctionnelle sont les fonctions affines.

On peut donc énoncé la propriété générale :

Les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ sont les fonctions affines.

III. Équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

Il s'agit de déterminer **toutes** les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

On commence par déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

D'après la relation fonctionnelle, on a : $f(0)=f(0+0)=f(0)\times f(0)=\left[f(0)\right]^2$.

Par conséquent, on a : $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

1$^{\text{er}}$ cas : $f(0)=0$

Démontrons que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=f(x+0)=f(x)\times f(0)=0$.

2$^{\text{e}}$ cas : $f(0)=1$

Démontrons que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)>0$.

On va d'abord démontrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

D'après la relation fonctionnelle, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times f(-x) = f(0) = 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$.

D'autre part, d'après la relation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$.

Pour tout réel x, on pose : $g(x) = \ln f(x)$.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, g est continue (composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x+y) &= \ln f(x+y) \\ &= \ln\left[f(x) \times f(y) \right] \\ &= \ln\left[f(x) \right] + \ln\left[f(y) \right] \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

D'après le **I**, on en déduit que g est linéaire.

Donc il existe un réel k tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = kx$.
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \mathrm{e}^{kx}$.

Conclusion :

Les fonction « solutions » de l'équation fonctionnelles sont la fonction nulle $x \mapsto 0$ et les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ où k est un réel quelconque.

Appendice

● Définition :

On rappelle qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs.

Par exemple, $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel.
Mais $\sqrt{2}$, e, π ne sont pas des nombres rationnels.

● Propriété : Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Démonstration :

Soit a un réel fixé.

Posons $x_n = \frac{\mathrm{E}(na)}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut d'emblée vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \in \mathbb{Q}$.

On va démontrer que la suite (x_n) converge vers a.

Pour cela, on utilise l'inégalité :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x-1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$

En appliquant cette propriété pour $x = na$, on obtient : $na-1 < \mathrm{E}(na) \leqslant na$.
Donc $\frac{na-1}{n} < \mathrm{E}(na) \leqslant \frac{na}{n}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{na-1}{n} < x_n \leqslant a$.

$\frac{na-1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ donc d'après le théorème des gendarmes, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Commentaires :

1. La propriété est évidente si on choisit un nombre rationnel a. Il suffit de choisir la suite constante dont tous les éléments sont égaux à a.

2. Pour les irrationnels célèbres, on peut donner des suites de rationnels « célèbres » qui convergent vers ces réels.

Exemples :

e : $\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

π : $\pi = 4 \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ (mais ce n'est pas avec cette formule que l'on calcule les décimales de π ; la convergence est trop lente)

ln 2 : $\ln 2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Pour e et ln 2, la démonstration est proposée dans les problèmes d'approfondissement.

Pour la formule avec π, la démonstration utilise la fonction Arctangente qui sera étudiée dans le supérieur.

Il existe d'autres suites.
Par exemple, pour π, on peut citer la célèbre suite des fractions continues.

Le calcul des décimales de π, utilise des formules du type « formule de Machin ».