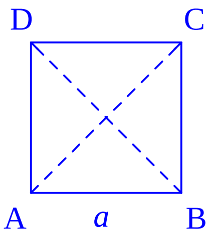
LE PRODUIT SCALAIRE, COMMENT S'Y PRENDRE ?

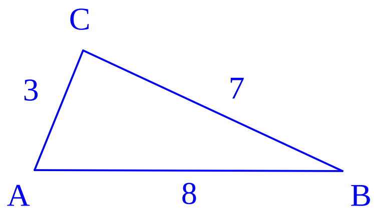
Savoir-faire N°1 : choisir l'expression la plus adaptée pour calculer un produit scalaire.

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

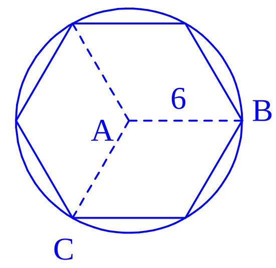
a.



b.

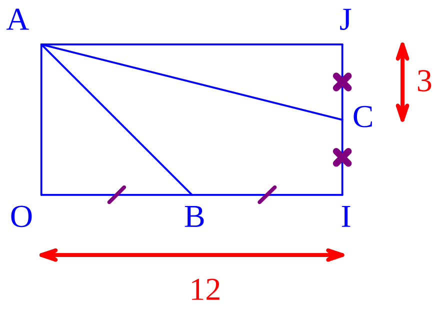


c.



(hexagone régulier)

d. AOIJ est un rectangle.

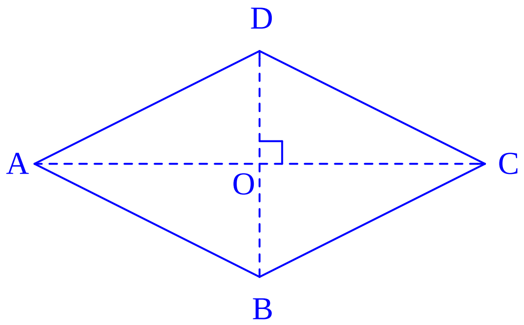


Penser à :

Savoir-faire N°2 : utiliser les propriétés du produit scalaire pour démontrer une égalité.

On considère un losange ABCD de centre O.

Démontrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = OA^2 - OB^2$.



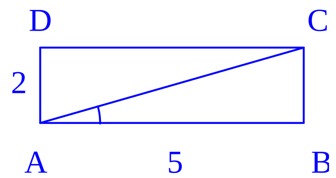
Penser à :

Savoir-faire N°3 : déterminer un angle en utilisant le produit scalaire.

ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 2$.

1°) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2°) En déduire la valeur décimale approchée au dixième par défaut de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.



Penser à :

Savoir-faire N°4 : démontrer l'orthogonalité en utilisant le produit scalaire.

ABCD est un carré.

M est un point du segment [AC] distinct de A et C.

P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AD) et (CD).

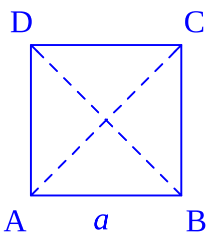
On se propose de démontrer que les droites (BQ) et (CP) sont perpendiculaires.

Penser à :

Corrigé

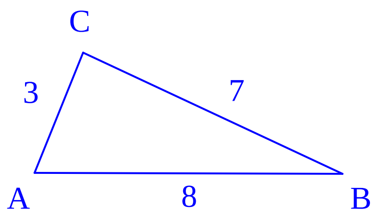
Savoir-faire N°1 : choisir l'expression la plus adaptée pour calculer un produit scalaire.
Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

a.

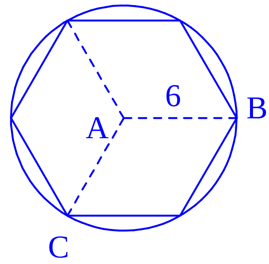


ABCD est un carré

b.

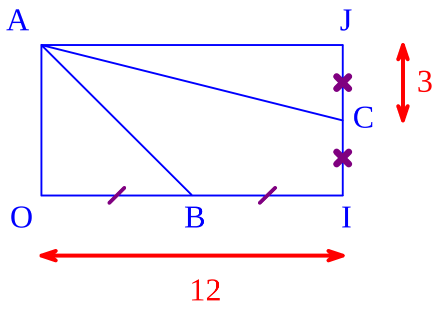


c.



(hexagone régulier)

d.



a. Méthode par projection orthogonale

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} \qquad \text{(projection orthogonale sur (AB))}$$

$$= a^2$$

Autre méthode très maladroite (ce n'est pas la méthode la plus adaptée) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos \widehat{CAB} \\ &= a \times a\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} \\ &= a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= a^2\end{aligned}$$

b.

c. Méthode par la définition

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos \frac{2\pi}{3} \\ &= 6 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -18\end{aligned}$$

On obtient un nombre que l'on n'interprète pas.

La méthode par projection orthogonale est tout à fait possible.

d. Méthode par décomposition (seule méthode possible)

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JC}\right)$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{AJ}} + \overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{AJ} + \underbrace{\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{JC}}$$

$$\begin{aligned} &= 0 + OB \times AJ + AO \times JC \\ &= 72 + 18 \\ &= 90 \end{aligned}$$

On obtient un nombre que l'on n'interprète pas.

On remplace le produit scalaire initial par un autre produit scalaire plus compliquée.
Ne pas remplacer des vecteurs par des longueurs (c'est-à-dire par des nombres).
On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ (relation de Chasles pour les vecteurs).
La relation de Chasles ne marche pas pour les longueurs : $AB = AO + OB$.

Savoir-faire N°2 :

On considère un losange ABCD de centre O.
Démontrer que : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = OA^2 - OB^2$.

La méthode consiste à utiliser une décomposition (relation de Chasles).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} &= \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}\right) \\ &= OA^2 - OB^2 \quad \text{(identité remarquable scalaire)} \end{aligned}$$

La propriété reste valable dans un parallélogramme. On n'utilise pas le fait que ABCD soir un losange.