# Problème

## Partie A : Étude d'une suite de fonctions polynômes

On considère la suite $(P_n)$ de fonctions polynômes ainsi définie :

- quel que soit $x \in \mathbb{R}$ $P_0(x) = x$ ;
- quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et quel que soit $x \in \mathbb{R}$ $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x)$.

1°) Calculer $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ et $P_4(x)$.

2°) Déterminer :
- le degré de $P_n(x)$ ;
- le coefficient dominant de $P_n(x)$ ;
- la parité de $P_n$.

*Indication :* on pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

## Partie B : Application

On considère la fonction $f(x) = \tan x$ définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

1°) Démontrer que quelque soit $x \in D$, on a $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

2°) Calculer $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$ en fonction de $\tan x$.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a $f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$ quel que soit $x \in D$.