TS1

Contrôle du samedi 10 janvier 2015 (3 heures)

• Écrire très lisiblement, au stylo à plume, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

• Ne rien écrire, ne rien surligner sur l'énoncé.

• Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

• Il est demandé de rendre deux copies : l'une pour la partie d'enseignement obligatoire, l'autre pour la partie de spécialité.

• Pour l'exercice **I**, compléter le tableau donné sur la feuille à joindre à la copie d'enseignement obligatoire.

Enseignement obligatoire (note sur 20)

I. (5 points)

Dans cet exercice, aucun détail des calculs n'est demandé sur la copie.
On donnera directement les résultats, sans rédiger, ni écrire d'égalités (un seul résultat à chaque fois).

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et neuf jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :
- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.
On donnera les résultats des probabilités sous la forme de fractions irréductibles.

Partie 1

1°) Calculer la probabilité de gagner.

2°) Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3°) Un joueur joue 50 fois à la loterie dans des conditions identiques indépendantes.
Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de parties gagnées.

Partie 2

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :
- chaque joueur mise 1 euro par partie ;
- si le joueur gagne la partie il reçoit 5 euros ;
- si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.

1°) On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
Calculer l'espérance mathématique de X.

2°) L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
Pour quelle valeur de l'entier n le jeu est-il équitable ?

II. (4 points)

Pour la résolution de cet exercice, il est demandé de ne pas utiliser la forme algébrique.

1°) Démontrer que pour tout nombre complexe z on a : $\left|1-\mathrm{i}\,\overline{z}\right|=\left|z-\mathrm{i}\right|$.

2°) Parmi les expressions suivantes laquelle est égale à $\left(z-\mathrm{i}\right)\left(1-\mathrm{i}\,\overline{z}\right)$? Justifier.

$\left|z-\mathrm{i}\right|^2$ $\qquad$ $\mathrm{i}\times\left|z-\mathrm{i}\right|^2$ $\qquad$ $-\mathrm{i}\times\left|z-\mathrm{i}\right|^2$

III. (11 points)

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x \times \sin x$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

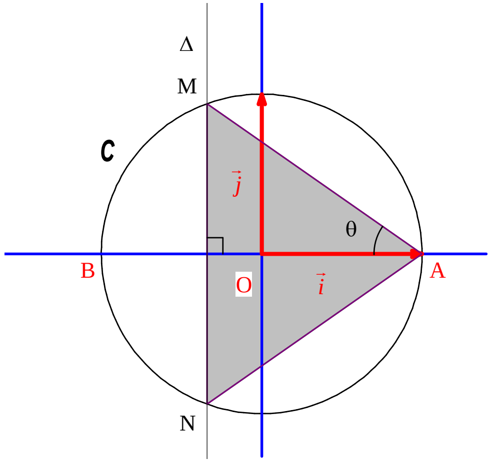
1°) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a : $f'(x)=\cos^2 x\times\left(1-2\sin x\right)\times\left(1+2\sin x\right)$ (détailler les calculs ; ne pas justifier la dérivabilité de f sur I).

2°) Dresser un tableau comprenant l'étude précise et détaillée du signe $f'(x)$ et les variations de f sur I.
Écrire les valeurs des extremums sans détailler les calculs.
Aucune justification n'est demandée pour l'étude du signe des facteurs de $f'(x)$.
On se contentera uniquement de faire le tableau.

3°) Justifier que l'équation $f(x)=\frac{1}{4}$ (E) admet exactement deux solutions dans I et vérifier que l'une de ces solutions est égale à $\frac{\pi}{4}$. On notera α l'autre solution.

Partie 2

Une unité de longueur est fixée.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



Ne rien écrire sur la figure ; ne pas la refaire sur la copie.

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On note A et B les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (− 1 ; 0).
Une droite Δ perpendiculaire à l'axe des abscisses coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts M et N, M étant celui des deux points qui a une ordonnée strictement positive.
On admet que le triangle AMN est isocèle en A.

1°) On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{OAM}}$.
Justifier que $\mathrm{AM} = 2\cos\theta$.
Démontrer que l'aire du triangle AMN est donnée, en unités d'aire, par $\mathcal{A}_{\mathrm{AMN}} = 2\cos^2\theta \times \sin 2\theta$; en déduire que $\mathcal{A}_{\mathrm{AMN}} = 4\cos^3\theta \times \sin\theta$.

2°) En exploitant les résultats obtenus dans la première partie, donner le (ou les) réel(s) θ tel(s) que
- l'aire du triangle AMN est égale à 1 unité d'aire.
- l'aire du triangle AMN soit maximale.

3°) Quelle particularité le triangle AMN d'aire maximale présente-t-il ? Justifier brièvement.

Enseignement de spécialité (note sur 20)

I. (10 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 5u_n + 3\times 2^n$ pour tout entier naturel n.

1°) En considérant la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 2^n$, démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3\times 5^n - 2^n$.

2°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur du reste de la division euclidienne de u_n par 6 suivant les valeurs de n.

3°) Le but de cette question est de démontrer la conjecture émise à la question 2°).

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a : $2^{2k} \equiv 4$ (mod. 6).

b) En déduire que, pour tout entier naturel k, on a : $2^{2k+1} \equiv 2$ (mod. 6).

c) Déterminer le reste de la division euclidienne de u_n par 6 suivant les valeurs de n.

II. (10 points)

Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$ et $b = 2n^2 + n$.

1°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer l'expression du PGCD de a et de b en fonction de n.

2°) Démontrer cette conjecture. Il est demandé de détailler la démarche.

TS1

Feuille à remettre dans la copie d'enseignement obligatoire

Nom :………………………………..

Prénom :…………………………..…

Obligatoire (sur 20)

I	II	III

I. (5 points)

Partie 1		
	1°)	
	2°)	
	3°)	

Partie 2		
	1°)	
	2°)	

Spécialité (sur 20)

I	II

Corrigé de la partie obligatoire du contrôle du 10-1-2015

I.

Partie 1	1°)	$\dfrac{7}{30}$
	2°)	$\dfrac{1}{46}$
	3°)	$\left[\dfrac{3}{25}\,;\dfrac{9}{25}\right]$ ou $\left[\dfrac{6}{50}\,;\dfrac{18}{50}\right]$

Partie 2	1°)	$\dfrac{1}{6}$
	2°)	$n=19$

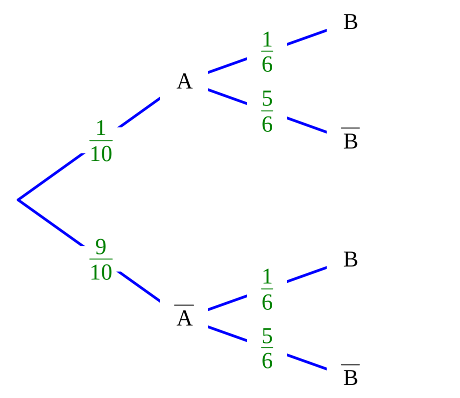
Partie 1

1°)

On définit les événements A : « Le jeton tiré est blanc », B : « Le jet donne 6 », F : « Le joueur gagne ».

On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

On écrit les probabilités sous forme fractionnaire.



F est la réunion des événements $\text{A}\cap\overline{\text{B}}$ et $\overline{\text{A}}\cap\text{B}$ et ces deux événements sont incompatibles.

$$P(\text{F})=P\left(\text{A}\cap\overline{\text{B}}\right)+P\left(\overline{\text{A}}\cap\text{B}\right)$$

$$=P(\text{A})\times P\left(\overline{\text{B}}/\text{A}\right)+P\left(\overline{\text{A}}\right)\times P\left(\text{B}/\overline{\text{A}}\right)\quad \left(\text{car } P(\text{A})\neq 0 \text{ et } P\left(\overline{\text{A}}\right)\neq 0\right)$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{5}{6}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{7}{30}$$

La probabilité que le joueur gagne est de $\dfrac{7}{30}$.

2°) On cherche $P\left(\text{A}/\overline{\text{F}}\right)$.

$$P\left(\text{A}/\overline{\text{F}}\right)=\frac{P\left(\text{A}\cap\overline{\text{F}}\right)}{P\left(\overline{\text{F}}\right)}$$ (formule de définition de la probabilité conditionnelle)

On a : $\text{A}\cap\overline{\text{F}}=\text{A}\cap\text{B}$ (car $\text{A}\cap\overline{\text{F}}$ est l'événement « Le joueur tire le jeton blanc et perd »).

Donc

$$P\left(\text{A}/\overline{\text{F}}\right)=\frac{P(\text{A}\cap\text{B})}{P\left(\overline{\text{F}}\right)}$$

$$=\frac{P(\text{A})\times P(\text{B}/\text{A})}{1-P(\text{F})}$$

$$=\frac{\frac{1}{10}\times\frac{1}{6}}{1-\frac{7}{30}}$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{6}\times\frac{30}{23}$$

$$=\frac{1}{46}$$

3°) On considère une variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale de paramètres 50 (nombre d'épreuves) et $\dfrac{7}{30}$ (probabilité d'un succès).

On trouve l'intervalle $\left[\dfrac{6}{50}\,;\dfrac{18}{50}\right]$.

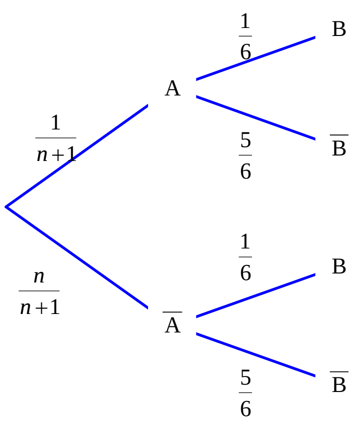
Partie 2

1°)

x_i	4	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{23}{30}$

$$\begin{aligned} E(X) &= 4\times\frac{7}{30}-\frac{23}{30} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2°)



$$\begin{aligned} P(X=4) &= P(F) \\ &= P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\times\frac{5}{6}+\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{n+5}{6(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=-1) &= 1-P(X=4) \\ &= \frac{5n+1}{6(n+1)} \end{aligned}$$

x_i	4	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{n+5}{6(n+1)}$	$\frac{5n+1}{6(n+1)}$

$$\begin{aligned} E(X) &= 4\times\frac{n+5}{6(n+1)}-1\times\frac{5n+1}{6(n+1)} \\ &= \frac{19-n}{6(n+1)} \end{aligned}$$

Pour que le jeu soit équitable, il faut et il suffit que $E(X)=0$ soit $n=19$.

II.

1°) **Démontrons que $\forall z\in\mathbb{C}\ \left|1-i\overline{z}\right| = \left|z-i\right|$.**

$$\begin{aligned} \forall z\in\mathbb{C}\qquad \left|1-i\overline{z}\right| &= \left|-i\left(i+\overline{z}\right)\right| \\ &= \left|-i\right|\times\left|i+\overline{z}\right| \\ &= 1\times\left|\overline{z}+i\right| \\ &= \left|\overline{z-i}\right| \\ &= \left|z-i\right| \quad \text{(le module d'un complexe est égal au module de son conjugué)} \end{aligned}$$

2°) On a : $\forall z\in\mathbb{C}\quad (z-i)\left(1-i\overline{z}\right) = -i\times\left|z-i\right|^2$.

Justifions ce choix.

$$\begin{aligned} \forall z\in\mathbb{C}\qquad (z-i)\left(1-i\overline{z}\right) &= (z-i)\times\left[-i\left(i+\overline{z}\right)\right] \\ &= -i(z-i)\times\left(\overline{z}+i\right) \\ &= -i(z-i)\times\left(\overline{z-i}\right) \\ &= -i\times\left|z-i\right|^2 \end{aligned}$$

III.

Partie 1

1°) **Démontrons que $\forall x \in \mathrm{I}\quad f'(x)=\cos^2 x\times(1-2\sin x)(1+2\sin x)$.**

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathrm{I}\quad f'(x)&=3\times(-\sin x)\times\cos^2 x\times\sin x+\cos^3 x\times\cos x\\&=-3\cos^2 x\times\sin^2 x+\cos^4 x\\&=\cos^2 x\times\left(\cos^2 x-3\sin^2 x\right)\\&=\cos^2 x\times\left(\cos^2 x+\sin^2 x-4\sin^2 x\right)\\&=\cos^2 x\times\left(1-4\sin^2 x\right)\\&=\cos^2 x\times(1-2\sin x)(1+2\sin x)\end{aligned}$$

2°) **Dressons un tableau comprenant l'étude du signe $f'(x)$ et les variations de *f* sur I.**

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
SGN de $\cos^2 x$		+		+	0
SGN de $1-2\sin x$		+	0	–	
SGN de $1-2\sin x$		+		+	
SGN $f'(x)$		+	0	–	0
Variations de *f*	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘	0

3°)

• **Justifions que l'équation $f(x)=\frac{1}{4}$ (E) admet exactement deux solutions dans I.**

→ On se place tout d'abord sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

La fonction *f* est strictement croissante continue sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

$f(0)=0$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}=0,324759526...$.

Or $\frac{1}{4}\in\left[0\,;\frac{3\sqrt{3}}{16}\right]$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

→ On se place ensuite sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

f est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}=0,324759526...$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Or $\frac{1}{4}\in\left[0\,;\frac{3\sqrt{3}}{16}\right]$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution β dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On en conclut que l'équation (E) admet exactement deux solutions dans I.

• **Vérifions que l'une de ces solutions est égale à $\frac{\pi}{4}$.**

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\cos^3\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\beta=\frac{\pi}{4}$.

Les solutions de (E) sont donc $\frac{\pi}{4}$ et α.

Partie 2

1°)

• Justifions que $AM = 2\cos\theta$.

Le triangle ABM est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.
Donc le triangle ABM est rectangle en M.
On a donc $\cos\theta = \dfrac{AM}{AB}$.

D'où $\cos\theta = \dfrac{AM}{2}$.
Donc $AM = 2\cos\theta$.

• Démontrons que $\mathcal{A}_{AMN} = 2\cos^2\theta \times \sin 2\theta$.

On a :

$\mathcal{A}_{AMN} = \dfrac{1}{2} AM \times AN \times \sin \widehat{MAN}$

$\mathcal{A}_{AMN} = 2\cos^2\theta \times \sin 2\theta = \dfrac{1}{2} \times 2\cos\theta \times 2\cos\theta \times 2\sin\theta$ (MAN est isocèle d'où (AB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MAN}$)

On obtient $\mathcal{A}_{AMN} = 2\cos^2\theta \times \sin 2\theta$.

• Déduisons-en que $\mathcal{A}_{AMN} = 4\cos^3\theta \times \sin\theta$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{AMN} &= 2\cos^2\theta \times 2\sin\theta \times \cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta \times \sin\theta\end{aligned}$$

2°)

On constate que $\mathcal{A}_{AMN} = 4f(\theta)$.

• Déterminons le (ou les) réel(s) θ tel(s) que l'aire du triangle AMN est égale à 1 unité d'aire.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{AMN} = 1 &\Leftrightarrow 4f(\theta) = 1 \\ &\Leftrightarrow f(\theta) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

On a démontré que (E) a pour solutions $\dfrac{\pi}{4}$ et α dans I.

Donc l'aire du triangle AMN pour les valeurs $\dfrac{\pi}{4}$ et α et de l'angle θ.

• Déterminons le (ou les) réel(s) θ tel(s) que l'aire du triangle AMN est maximale.

Le maximum de l'aire de AMN est obtenu au réel θ en lequel f atteint son maximum c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{6}$.

3°) **Déterminons la nature du triangle AMN d'aire maximale.**

Le triangle AMN est isocèle en A.

Or $\widehat{MAN} = 2 \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

AMN est un triangle isocèle dont un angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$. C'est donc un triangle équilatéral.

Corrigé de la partie spécialité du contrôle du 10-1-2015

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 5u_n + 3\times 2^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) En considérant la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 2^n$, démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = 3\times 5^n - 2^n$.

Par définition de la suite (v_n), $\forall n \in \mathbb{N}\ \ v_n = u_n + 2^n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \ v_{n+1} = u_{n+1} + 2^{n+1}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\quad v_{n+1} &= u_{n+1} + 2^{n+1}\\ &= 5u_n + 3\times 2^n + 2^{n+1}\\ &= 5u_n + 3\times 2^n + 2\times 2^n\\ &= 5u_n + 5\times 2^n\\ &= 5\left(u_n + 2^n\right)\\ &= 5v_n\end{aligned}$$

Le résultat obtenu permet de dire que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 2^0 = 2+1 = 3$ et de raison 5.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\quad v_n = 3\times 5^n$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n = v_n - 2^n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n = 3\times 5^n - 2^n$.

2°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur du reste de la division euclidienne de u_n par 6 suivant les valeurs de *n*.

On reste en mode fonction « $\mathrm{Y1} = \mathrm{reste}\left(3\times 5^{\mathrm{X}} - 2^{\mathrm{X}}, 6\right)$ » et on obtient un tableau de valeurs.

À partir de 17, on a un message d'erreur pour dépassement de capacité.

Si $n = 0$, alors le reste de la division euclidienne de u_0 par 6 est 2.

D'après la calculatrice, on peut conjecturer que :

- si *n* est un entier naturel pair non nul, alors le reste de la division euclidienne de u_n par 6 est égal 5.
- si *n* est un entier naturel impair, alors le reste de la division euclidienne de u_n par 6 est égal 1.

3°) Le but de cette question est de démontrer la conjecture émise à la question 2°).

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a : $2^{2k} \equiv 4$ (mod. 6).

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la phrase $P(k)$: « $2^{2k} \equiv 4$ (mod. 6) ».

• Démontrons que $P(1)$ est vraie.

On a : $2^{2\times 1} = 4$.

Comme $4 \equiv 4$ (mod. 6), on peut bien écrire $2^{2\times 1} \equiv 4$ (mod. 6).

On en déduit que $P(1)$ est vraie.

• Considérons un entier naturel *k* tel que $P(k)$ soit vraie. Démontrons qu'alors $P(k+1)$ est vraie.

On a : $2^{2k} \equiv 4$ (mod. 6).

Donc $2^{2k}\times 2^2 \equiv 4\times 2^2$ (mod. 6) d'où $2^{2(k+1)} \equiv 16$ (mod. 6).

Or $16 \equiv 4$ (mod. 6).

Donc $2^{2(k+1)} \equiv 4$ (mod. 6).

Conclusion :

On a démontré que $P(1)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geqslant 1$, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc d'après le principe de récurrence, la phrase $P(k)$ est vraie pou tout entier naturel $k \geqslant 1$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel *k*, on a : $2^{2k+1} \equiv 2$ (mod. 6).

On a : $2^{2k} \equiv 4$ (mod. 6) d'où $2^{2k}\times 2 \equiv 8$ (mod. 6).

Or $8 \equiv 2$ (mod. 6).

Donc $2^{2k+1} \equiv 2$ (mod. 6).

c) Déterminer le reste de la division euclidienne de u_n par 6 suivant les valeurs de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = 3\times 5^n - 2^n$

On a : $5 \equiv -1$ (mod. 6).

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\quad 5^n \equiv (-1)^n$ (mod. 6).

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n \equiv 3\times(-1)^n - 2^n$ (mod. 6).

1$^{\text{er}}$ cas : $n=2k$ $\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$

On a : $u_{2k}\equiv 3\times(-1)^{2k}-2^{2k}$ (mod. 6).

Donc $u_{2k}\equiv 3-2^{2k}$ (mod. 6).

Or $2^{2k}\equiv 4$ (mod. 6) d'après la question 3°) a).

Donc $u_{2k}\equiv 3-4$ (mod. 6) soit $u_{2k}\equiv -1$ (mod. 6) ou encore $u_{2k}\equiv 5$ (mod. 6).

Le reste de la division euclidienne de u_{2k} par 6 est égal 5.

2$^{\text{e}}$ cas : $n=2k+1$ $\left(k\in\mathbb{N}\right)$

On a : $u_{2k+1}\equiv 3\times(-1)^{2k+1}-2^{2k+1}$ (mod. 6).

Donc $u_{2k+1}\equiv -3-2^{2k+1}$ (mod. 6)

Or $2^{2k+1}\equiv 2$ (mod. 6) d'après la question 3°) b).

Donc $u_{2k+1}\equiv -3-2$ (mod. 6) soit $u_{2k+1}\equiv -5$ (mod. 6) ou encore $u_{2k+1}\equiv 1$ (mod. 6).

Le reste de la division euclidienne de u_{2k+1} par 6 est égal 1.

3$^{\text{e}}$ cas : $n=0$

On a déjà traité ce cas dans la question 2°).

II.

Soit n un entier naturel. On pose $a=2n^3+5n^2+4n+1$ et $b=2n^2+n$.

1°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer l'expression du PGCD de a et de b en fonction de n.

Pour $n=0$, on trouve $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

Pour $n=1$, on trouve $\text{PGCD}(a\,;b)=3$.

Pour $n=2$, on trouve $\text{PGCD}(a\,;b)=5$.

Etc.

À l'aide de la calculatrice, on peut donc conjecturer que $\text{PGCD}(a\,;b)=2n+1$.

2°) Démontrer cette conjecture. Il est demandé de détailler la démarche.

On commence par factoriser a et b.

On a : $a=(2n+1)\left(n^2+2n+1\right)$ et $b=n(2n+1)$.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(a\,;b)&=\text{PGCD}\left((2n+1)\left(n^2+2n+1\right);n(2n+1)\right)\\&=(2n+1)\,\text{PGCD}\left(n^2+2n+1\,;n\right)\end{aligned}$$

De plus, on a : $1\times\left(n^2+2n+1\right)-(n+2)\times n=1$.

Comme 1 et $-(n+2)$ sont des entiers relatifs, grâce au théorème de Bezout, on en déduit que n et n^2+2n+1 sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(a\,;b)&=(2n+1)\times 1\\&=2n+1\end{aligned}$$