1ère S

Le produit scalaire dans le plan (1)
Expression trigonométrique

Plan du chapitre :

Rappels : valeurs remarquables du cosinus

Angle en degrés

x	0	30	45	60	90	120	135	150	180
$\cos x°$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Angle en radians

y	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos y$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons définir la notion de produit scalaire de deux vecteurs.
Nous allons apprendre à calculer un produit scalaire.

Nous verrons seulement plus tard (dans le chapitre « produit scalaire (3) ») l'utilisation que l'on peut en faire en géométrie.

Nous verrons dans les deux chapitres qui suivront sur le produit scalaire des propriétés qui nous permettront de calculer un produit scalaire par d'autres manières.

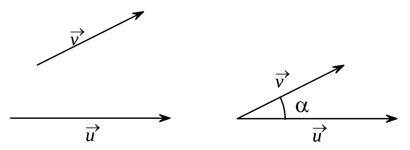
Avertissement : Une unité de longueur est fixée dans tout le chapitre.

I. Définition du produit scalaire de deux vecteurs

Nous allons définir la notion de produit scalaire de $\boxed{\text{deux}}$ vecteurs du plan.
La définition du produit scalaire ne manque pas de surprendre de prime abord.

1°) Définition (expression trigonométrique)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques du plan.



Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (on lit « $\vec{u}$ **scalaire** $\vec{v}$ ») ainsi défini :

1er cas : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont différents du vecteur nul

α est la mesure en radians de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ $(\alpha \in [0\,;\pi])$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$$

2e cas : l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Cette définition est à savoir par cœur.

2°) Lecture de la formule

L'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » est égal au produit de la norme $\vec{u}$ par la norme de $\vec{v}$ par le cosinus de α ».

3°) Notation

Le produit scalaire est noté par $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On n'emploie pas le signe de multiplication $\times$ que l'on réserve à la multiplication pour les nombres.

4°) Remarque sur l'angle géométrique de deux vecteurs non nuls

On notera que l'angle géométrique de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls apparaît sur une figure à partir du moment où on les a représentés à partir de la même origine (cf. figure).
Il s'agit d'un angle saillant dont la mesure en degrés est comprise entre 0 et 180 et dont la mesure en radians est comprise entre 0 et π.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on retient la formule du produit scalaire sous la forme :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est égal au produit des normes par le cosinus de l'angle géométrique qu'ils forment.

On dit qu'il s'agit de l'« expression trigonométrique du produit scalaire » parce que l'on a un cosinus dans la formule.

Attention à la notation de l'angle géométrique de deux vecteurs : chapeau et parenthèses.

5°) Exemples

● Exemple 1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On ne fait pas de figure.

Tout est donné :

- les normes (pas de calcul à faire) ;

- l'angle (valeur remarquable ici).

Le calcul du produit scalaire est très simple

D'après les valeurs des normes, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

On applique donc la formule de définition.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\\ &= 4 \times 5 \times \cos\frac{\pi}{3}\\ &= 4 \times 5 \times \frac{1}{2}\\ &= 10\end{aligned}$$

● **Exemple 2**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=47°$.

Calculer $\vec{u}\bullet\vec{v}$.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=15\times\cos 47°$ (valeur exacte)

On ne repasse pas en radian.
On peut éventuellement donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

II. Commentaires sur la définition

1°) Calcul d'un produit scalaire

On peut calculer le produit scalaire avec l'expression de définition de deux vecteurs non nuls lorsque l'on connaît :
- leurs normes ;
- l'angle géométrique qu'ils forment (valeur remarquable en général).

Le calcul d'un produit scalaire est très simple.

Pour l'instant, pour calculer un produit scalaire, on est obligé de donner un angle et les normes.
La plupart du temps, on donnera les valeurs remarquables.

La formule $\vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est la formule générale du produit scalaire de deux vecteurs non nuls.

Nous verrons dans la suite du cours des cas particuliers de cette formule (vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux).

2°) Problème des unités

Le problème de l'unité d'un produit scalaire ne se pose pas.
Cependant, on peut dire que $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ étant exprimées dans la même unité de longueur, $\vec{u}\bullet\vec{v}$ est exprimé dans l'unité de longueur au carré (comme une aire) ; l'usage veut cependant qu'on ne l'écrive pas.

Pour nous, le produit scalaire sera un nombre sans unité.

3°) Nature d'un produit scalaire

On notera que le résultat d'un produit scalaire est un nombre.

Lorsque l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, on écrit $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$.
On écrit bien 0 et non $\vec{0}$.

4°) Interprétation d'un produit scalaire

On ne peut pas vérifier géométriquement le résultat d'un produit scalaire.
Un produit scalaire ne représente aucune grandeur géométrique.
Ce n'est donc pas la peine de chercher une interprétation concrète puisqu'il n'y en a pas.
En particulier, il n'y a aucune application du produit scalaire dans la vie pratique.

5°) Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

Il est possible d'obtenir la valeur du produit scalaire de deux vecteurs du plan sur une figure géométrique grâce à un logiciel de géométrie dynamique (tel que *Geogebra*).

6°) Intérêt du produit scalaire

Nous verrons que le produit scalaire permet de :

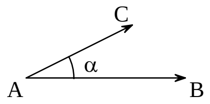
- démontrer des propriétés géométriques (orthogonalité de droites) ;
- calculer des distances ;
- calculer des angles (logique puisqu'il y a cos α).

III. Produit scalaire de vecteurs définis par des points (vecteurs ayant la même origine)

C'est le cas le plus fréquent que nous aurons puisque la plupart du temps nous travaillerons sur des figures géométriques.
Il s'agit d'un cas particulier d'application de la formule définissant le produit scalaire de deux vecteurs.

1°) Formule du produit scalaire de deux vecteurs définis par des points ayant la même origine

A, B, C sont trois points quelconques tels que $A\neq B$ et $A\neq C$.



$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\alpha$

ou mieux :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}}$$

Cette égalité se lit : « $\overrightarrow{AB}$ scalaire $\overrightarrow{AC}$ est égale au produit des distances AB et AC par le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ ».

Cette « formule » est à savoir par cœur.

Attention, la formule ne s'applique que pour des vecteurs ayant la même origine.
Par exemple, si on a $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}$ la formule ne s'applique pas.
Nous verrons comment nous en sortir dans ce cas.

2°) Exemples d'écritures

● D, E, F sont trois points tels que $D\neq E$ et $D\neq F$.

$\overrightarrow{DE}\bullet\overrightarrow{DF}=DE\times DF\times\cos\widehat{EDF}$

• I, J, K sont trois points tels que $\mathrm{I} \neq \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} \neq \mathrm{K}$.

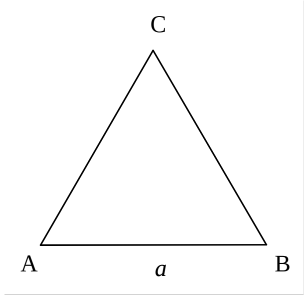
$\overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IK}} = \mathrm{IJ} \times \mathrm{IK} \times \cos \widehat{\mathrm{JIK}}$

• E, F, G sont trois points tels que $\mathrm{E} \neq \mathrm{F}$ et $\mathrm{E} \neq \mathrm{G}$.

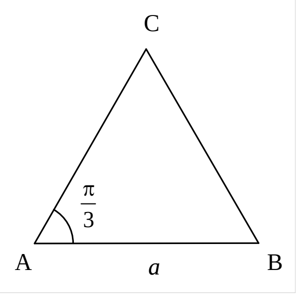
$\overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EG}} = \mathrm{EF} \times \mathrm{EG} \times \cos \widehat{\mathrm{FEG}}$

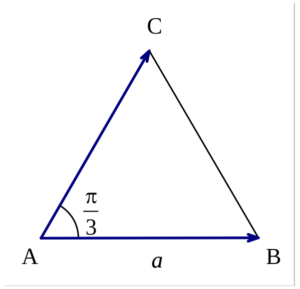
3°) Exemple de calcul

ABC est un triangle équilatéral de côté *a*.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.



En général, on ne trace pas les vecteurs qui interviennent dans le produit scalaire. On se contente de les repasser avec le doigt.





$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos \widehat{\mathrm{BAC}} \\ &= a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos \widehat{\mathrm{BAC}} \\ &= a \times a \times \cos 60° \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

Remarques :

• En général, lorsque l'on calcule le produit scalaire de deux vecteurs sur une figure géométrique, on ne trace pas les vecteurs. Nous le ferons néanmoins au début, dans quelques exercices, de manière à mieux se représenter l'angle qu'ils forment.

• On évite d'utiliser les normes puisqu'il s'agit de produits scalaires de vecteurs définis par des points.

• On ne met pas de parenthèses après le cos.

5°) Cas général

Il faudrait peut-être commencer par là, pour ensuite donner un cas particulier.

A, B, C, D sont des points alignés tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$.

On peut toujours écrire la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}} ; \overrightarrow{\mathrm{CD}}}\right)$.

Mais pour l'instant on ne sait pas le calculer si on ne connaît pas AB, CD ou $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}} ; \overrightarrow{\mathrm{CD}}}\right)$.

IV. <u>Propriété de symétrie du produit scalaire</u>

1°) Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$$

2°) Démonstration

La démonstration est très facile.

• La propriété est évidente lorsqu'au moins l'un des deux vecteurs est nul.

• On suppose donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}}\right)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{v} ; \vec{u}}\right)$$

On utilise la propriété de la multiplication des réels et le fait que $\left(\widehat{\vec{v}\ ;\vec{u}}\right)=\left(\widehat{\vec{u}\ ;\vec{v}}\right)$.

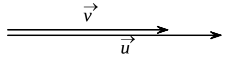
V. Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires non nuls

1°) Propriété (à utiliser directement)

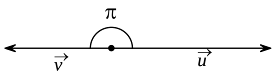
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=$

- $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de même sens**



- $-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de sens contraire**



On retiendra cette formule sous la forme :

Le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires non nuls est égal au produit des normes précédé du signe + s'il sont de même sens et du signe – s'ils sont de sens contraire.

2°) Démonstration

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$

1er cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de même sens**

$\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=0$ (les deux vecteurs forment un angle géométrique nul) et $\cos 0=1$

2e cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de sens contraire**

$\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\pi$ (les deux vecteurs forment un angle géométrique plat) et $\cos\pi=-1$

3°) Commentaire

Il s'agit d'un cas particulier de la formule générale.

4°) Cas de vecteurs colinéaires définis par des points

A, B, C sont des points alignés tels que $A\neq B$ et $A\neq C$.

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$.

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$.

A, B, C, D sont des points alignés tels que $A\neq B$ et $C\neq D$.

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=AB\times CD$.

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-AB\times CD$.

5°) Exemples

- A et B sont deux points tels que $AB=3$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires de sens contraires donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-AB\times AB=-3\times3=-9$.

- C et D sont deux points tels que $CD=2$.

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DC}=-4$

6°) Petite propriété (générale)

Soit A et B deux points distincts.

Nous voulons écrire plus simplement : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-AB\times AB=-AB^2$

Cette propriété sera revue plus tard dans le chapitre « Produit scalaire (3) ».

VI. Signe d'un produit scalaire

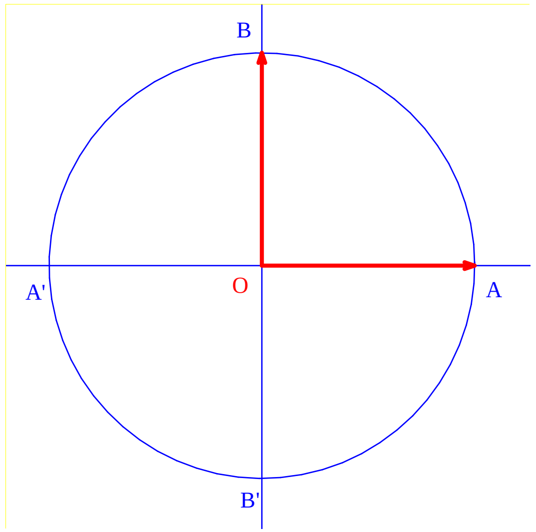
1°) Étude

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls quelconques.
$\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\alpha$ ($\alpha\in[0\,;\pi]$)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\underbrace{\|\vec{u}\|}_{>0}\times\underbrace{\|\vec{v}\|}_{>0}\times\cos\alpha$

Le signe de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le même que celui de $\cos\alpha$.

α	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos\alpha$		$+$	0	$-$	



2°) Propriété

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **aigu**
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **obtus**
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est **droit**

3°) Application

Cette propriété permet éventuellement de vérifier géométriquement le signe d'un produit scalaire.

4°) Signe d'un produit scalaire de deux vecteurs ayant la même origine

A, B, C sont trois points quelconques du plan tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.

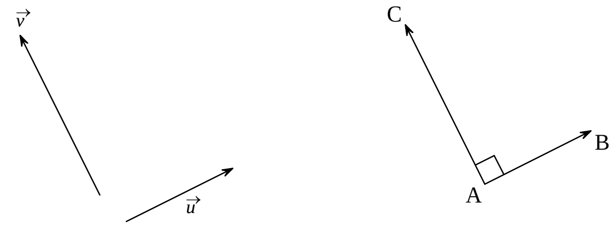
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$ si et seulement si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$ si et seulement si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ si et seulement si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

VII. Produit scalaire et orthogonalité

1°) Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** (on note $\vec{u} \perp \vec{v}$) pour exprimer que :

- soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2}$;



- soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

On retiendra que par convention le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemples :

Dans un carré ABCD,

- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux (on écrit $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$) ;
- les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux (on écrit $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$).

2°) Propriété (déduite de l'étude du signe du produit scalaire)

Le produit scalaire sert à caractériser l'orthogonalité.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Attention c'est bien 0 et pas $\vec{0}$.

Utilisation de cette propriété :

- Si l'on sait que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors on peut écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Réciproquement, si l'on sait deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors on peut dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3°) Remarques

• Emploi de l'adjectif « orthogonal » :

L'adjectif « orthogonal » s'applique à deux droites, deux vecteurs, deux directions.

• Notations

On utilise le même symbole pour des vecteurs que pour des droites : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

4°) Erreur à ne pas faire

~~Si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.~~

P Q

$\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ $\qquad$ $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

P $\Rightarrow$ Q $\qquad$ <u>mais</u> $\qquad$ Q $\not\Rightarrow$ P

5°) Propriété

On a la propriété suivante :

> A, B, C, D sont quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
>
> $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = 0$ **si et seulement si (AB) $\perp$ (CD).**

6°) Exemple d'utilisation

Soit ABCD un carré.

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CD}$ (attention les vecteurs n'ont pas la même origine), $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD}$.

Dans chacun des cas, les vecteurs qui interviennent dans le produit scalaire sont orthogonaux donc les produits scalaires sont tous nuls.

On rédige ainsi :

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux, etc.

On retiendra que lorsque deux vecteurs sont orthogonaux, ont peut directement écrire que leur produit scalaire fait 0.

VIII. <u>Carré scalaire d'un vecteur</u>

1°) Définition

> $\vec{u}$ est un vecteur quelconque.
>
> On note $\boldsymbol{\vec{u}^{2} = \vec{u} \bullet \vec{u}}$.
>
> On dit qu'il s'agit du **carré scalaire** de $\vec{u}$.

2°) Propriété

> Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\boldsymbol{\vec{u}^{2} = \|\vec{u}\|^{2}}$.

Attention, contrairement à la physique, on n'écrira pas : $\|\vec{u}\| = u$ ni $\|\vec{u}\|^{2} = u^{2}$.

(Le *u* sans flèche ne signifie rien.)

On retiendra :

$$\boxed{\vec{u}^{2} = \vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^{2}}$$

3°) Démonstration

1er cas : $\boxed{\vec{u} \neq \vec{0}}$

$\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\underbrace{\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{u}}\right)}_{0}$

$\qquad = \|\vec{u}\|^{2}$

2^{e} cas : $\boxed{\vec{u} = \vec{0}}$

$\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ (par définition du produit scalaire de deux vecteurs)

Or $\|\vec{u}\|^{2} = 0$ car $\|\vec{0}\| = 0$

Donc $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^{2}$.

4°) Cas particulier d'un vecteur défini par deux points

A et B sont deux points quelconques du plan.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ (définition)}$$
$$= \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 \quad \text{(propriété du 2°)}$$
$$= AB^2 \quad \left(\text{car } \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = AB\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{AB}}^2 = \left\| \overrightarrow{\mathbf{AB}} \right\|^2 = \mathbf{AB}^2}$$

carré scalaire du vecteur (domaine vectoriel) **distance au carré (domaine métrique)**

IX. Lien avec la physique : travail d'une force

1°) Définition

Par définition, le **travail d'une force** constante $\vec{F}$ qui s'exerce en un point sur un trajet rectiligne de A à B est donné par la formule $\boxed{W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$ (formule à savoir par cœur).

Ainsi, on a : $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \left\| \vec{F} \right\| \times \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \cos\left(\widehat{\vec{F} ; \overrightarrow{AB}}\right)$ (on suppose que $\vec{F} \neq \vec{0}$).

2°) Unités

Le travail d'une force est exprimé en joules sachant que la norme de $\vec{F}$ est exprimée en newtons et la distance AB en mètres.
Le nom vient du physicien anglais James Prescott Joule (1818-1889).

3°) Commentaire

C'est la seule interprétation « concrète » du produit scalaire que nous donnerons.

4°) Signe

Suivant le signe du travail d'une force, on parle de **travail moteur** lorsqu'il est positif et de **travail résistant** lorsqu'il est négatif.

Fiche résumé

Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques du plan.

Lorsque les deux vecteurs sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}}\right)$.

Lorsque l'un des vecteurs est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.