$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le 3-2-2015

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) était un mathématicien, astronome et physicien allemand de génie. Surnommé « le prince des mathématiciens », il montra dès l'école primaire des qualités extraordinaires pour le calcul : alors que son maître demandait aux élèves de la classe de calculer « à la main » (il n'y avait pas de calculatrice à cette époque !) la somme de tous les entiers naturels de 1 à 100, il mit seulement quelques instants pour inscrire 5050 sur son ardoise… et c'était le bien bon résultat de cette somme !
Pour calculer ainsi rapidement la somme $S=1+2+3+\ldots+98+99+100$, le jeune Gauss eut l'idée d'écrire les termes de la somme dans l'ordre décroissant : $S=100+99+\ldots+3+2+1$.
Il additionna ensuite membre à membre les deux expressions de sorte qu'il obtint l'égalité
$2S=(1+100)+(2+99)+\ldots+(100+1)$.
Ainsi, il remarqua ensuite que $S=101+101+\ldots+101$.
Il pouvait dire alors que $2S$ était égal à la somme de 100 termes tous égaux à 101 soit $2S=100\times101$.
Il en déduisit que $S=\dfrac{100\times101}{2}$ soit $S=50\times101$.
Il ne resta plus au jeune Gauss qu'à calculer mentalement ce produit et il obtint le résultat $S=5\ 050$.

Voici une présentation commode des calculs de Gauss :

$$\begin{array}{l}
S = \ 1 + 2 + 3 + \quad \ldots \quad + 99 + 100 \\
S = \ 100 + 99 + \quad \ldots \quad + 3 + 2 + 1
\end{array}$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient successivement :

$$2S=(1+100)+(2+99)+\ldots+(100+1)$$

$$2S=\underbrace{101+101+\ldots+101}_{\text{100 termes}}$$

$$2S=100\times101$$

Donc $S=\dfrac{100\times101}{2}=5050$

1°) En utilisant la même méthode et la même présentation, calculer la somme de tous les entiers naturels de 1 à 2015.

2°) Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Exprimer la somme de tous les entiers naturels de 1 à *n* en fonction de *n*.

Consignes

- Utiliser une copie simple : la totalité du devoir doit tenir sur cette copie.

- Au recto, rédiger la question 1°) ; au verso, rédiger la question 2°).

- Écrire au stylo à plume, très lisiblement et sans rature.

Corrigé du DM pour le 3-2-2015

1°) **Calculons la somme de tous les entiers naturels de 1 à 2015.**

On pose $S = 1+2+3+...+2014+2015$.

$$\begin{array}{lcccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & ... & + & 2014 & + & 2015 \\ S = & 2015 & + & 2014 & + & ... & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient successivement :

$2S = (2015+1)+(2014+1)+...+(1+2015)$

$2S = 2016+2016+...+2016$ (2015 termes)

$2S = 2016 \times 2015$

Donc $S = \dfrac{2016 \times 2015}{2} = 1008 \times 2015 = 2\ 031\ 120$

1°) $n \in \mathbb{N}^*$

Exprimons la somme de tous les entiers naturels de 1 à *n* en fonction de *n*.

On pose $S = 1+2+3+...+(n-1)+n$.

$$\begin{array}{lccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & ... & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient successivement :

$2S = (n+1)+(n-1+2)+(n-2+3)+...+(n+1)$.
$2S = (n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)$
$2S = n \times (n+1)$

Donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On retient ce résultat (formule sommatoire) sous cette forme factorisée (et non sous forme développée $S = \dfrac{n^2+n}{2}$).