1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 27 janvier 2015 (3 heures)

• Le barème est donné sur 40.

• On répondra directement sur la copie fournie avec le sujet.

• Un certain nombre de questions nécessite une recherche préalable au brouillon. On ne rédigera sur la copie qu'après avoir effectué cette recherche.

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 12x + 9}{2x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^3 - 6x - 9}{x^3}$.

On ne demande d'écrire que 4 lignes de calcul.

2°) a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $x^3 - 6x - 9 = (x-3)\left(x^2 + 3x + 3\right)$.

b) Déterminer les coordonnées du (des) point(s) où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

3°) Démontrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point E d'abscisse – 1 passe par O.

4°) Déterminer les coordonnées du point F de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente T' est parallèle à la droite Δ d'équation $y = x - 3$.

II.

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x - x^2}{x + 1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$, on a $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$.

On ne demande d'écrire que trois lignes de calculs.

2°) Recopier et compléter la phrase : « f' s'annule en ……………………………….. ».

3°) Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ est les variations de *f*.

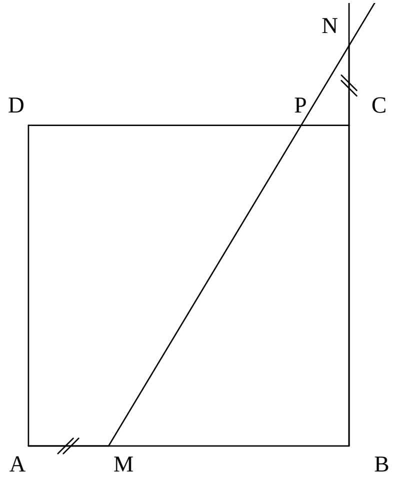
Calculer les extremums au brouillon et compléter le tableau de variations avec ces valeurs. On donnera les extremums sous la forme la plus simple possible.

Partie 2

Une unité de longueur est fixée.

On considère un carré ABCD de côté 1. Soit M un point quelconque de [AB] et N le point de la demi-droite [BC) n'appartenant pas au segment [BC] tel que $\text{CN} = \text{AM}$. La droite (MN) coupe le segment [CD] en un point P.

L'objectif est de rendre la distance PC maximale.



1°) On pose $\text{AM} = x$.

Exprimer la distance PC en fonction de *x*.

2°) Déterminer pour quelle position de M la distance PC est maximale. Que vaut alors la distance PC ?

Partie 3

Dans cette partie, on reprend la situation de la partie 2 et on s'intéresse à la position du point M pour laquelle la distance PC est maximale.

1°) On note E le symétrique de B par rapport à A. Le cercle Γ de centre E passant par D coupe le segment [AB] en un point Q.

Vérifier que le point Q est confondu avec le point M pour lequel la distance PC est maximale

On obtient ainsi une construction géométrique à la règle et au compas du point M qui rend PC maximale.

On ne demande pas d'effectuer la construction sur la copie.

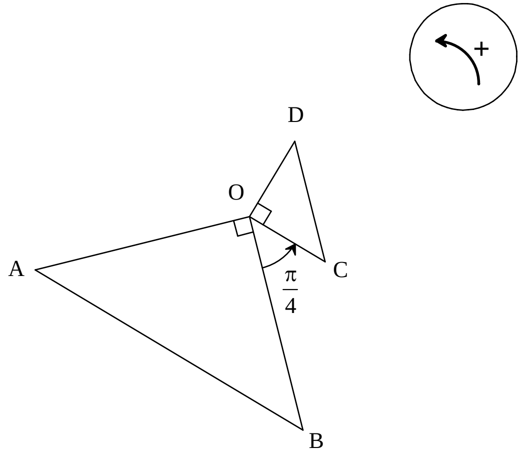
2°) On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{ADM}}$.

Déterminer la valeur exacte de α. On pourra s'intéresser à la nature du triangle EDM.

III.

Dans le plan orienté, on considère deux triangles OAB et OCD rectangles isocèles en O et directs.

On suppose de plus que $\left(\overrightarrow{\text{OB}}\,;\overrightarrow{\text{OC}}\right) = \dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$. Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.



1°) Compléter sans justifier les égalités suivantes :

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BO}\right) = $ .... $\left(\overrightarrow{CO}\,;\overrightarrow{CD}\right) = $ ....

2°) Déterminer par le calcul une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{OD}\right)$.

On détaillera les calculs (un calcul par ligne).
En déduire que la droite (OD) est la hauteur issue de O dans le triangle AOB.

IV.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé d'origine O.
On note A, B, A', B' les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (– 1 ; 0), (0 ; – 1).
Soit x un réel quelconque.
On note M et M' les points images respectifs sur $\mathcal{C}$ des réels x et $-2x$.
Aucune figure n'est demandée dans cet exercice.

1°) Dans cette question, on prend $x = \dfrac{43\pi}{6}$.
Donner la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.
2°) On revient au cas où x est quelconque.
Déterminer tous les réels x tels que les points M et M' soient confondus.
En déduire les réels x de l'intervalle $[0\,;2\pi]$ tels que les points M et M' soient confondus.

 Aide à la rédaction :

Raisonner par équivalence en rédigeant par chaîne d'équivalences :

M = M' si et seulement si …

si et seulement si …

si et seulement si …

V.

Un stand de fête foraine propose de tourner une roue qui comporte 5 secteurs identiques.
Deux secteurs permettent de gagner un lot, un secteur permet de gagner deux lots et les autres ne font rien gagner.
Un joueur paie un droit d'entrée et fait tourner deux fois la roue.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lots gagnés à l'issue des deux parties.
Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré au brouillon.
On donnera tous les résultats demandés sous forme décimale.

1°) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ? Répondre par une phrase sans justifier.
2°) Déterminer la loi de probabilité de X. On complètera sans expliquer le tableau donné sur la feuille de réponses.
3°) Déterminer la probabilité de gagner au moins deux lots.
4°) Calculer l'espérance mathématique de X.
5°) Chaque lot coûte 5 € au forain.
À quelle valeur minimale le forain doit-il fixer le droit d'entrée pour espérer faire du bénéfice ? Justifier brièvement.

VI.

Partie 1

Trois amis, Pierre, Jacques et Rémi, ont imaginé le jeu suivant.
Chacun dispose d'une pièce équilibrée qu'il lance une fois, pour obtenir pile ou face.
Si le résultat d'un joueur est différent de celui des deux autres, il reçoit 1 € de chacun d'entre eux.
Dans tous les autres cas, la partie est nulle.

On donnera tous les résultats des probabilités demandées sous forme de fractions irréductibles.

1°) À l'aide d'un arbre, déterminer la probabilité :
a) que Pierre gagne ;
b) qu'il y ait un gagnant ;
c) que la partie soit nulle.
2°) On note X le gain algébrique de Pierre en euros ; X prend donc les valeurs – 1, 0 et 2.
Donner la loi de probabilité de X.
On complètera sans expliquer le tableau donné sur la feuille de réponses.
3°) Calculer l'espérance et la variance de X.

Partie 2

Dans cette partie, on considère n amis A_1, A_2, …, A_n (n est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 3).
La règle du jeu est la même qu'à la partie 1.
Chacun dispose d'une pièce équilibrée qu'il lance une fois, pour obtenir pile ou face.
Si le résultat d'un joueur est différent de celui des autres, il reçoit 1 € de chacun d'entre eux.
Dans tous les autres cas, la partie est nulle.

1°) Justifier que la probabilité que A_1 gagne la partie est égale à $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
2°) Exprimer en fonction de n la probabilité qu'il y ait un gagnant ; en déduire la probabilité que la partie soit nulle.
3°) On note X le gain algébrique en euros de l'un quelconque des joueurs, par exemple A_1.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ? Répondre par une phrase sans justifier.
b) Donner la loi de probabilité de X.
On complètera sans expliquer le tableau donné sur la feuille de réponses.
c) Calculer l'espérance de X.
d) Démontrer que la variance de X est égale à $\dfrac{n(n-1)}{2^{n-1}}$.

$1^{\text{ère}}$ S1

Nom : ……………………

Prénom : …………………

Contrôle du 27 janvier 2015
Copie à rendre

I	II	III	IV	V	VI	Total/40	Total/20

I.

1°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°)

a) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

b) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

II.

Partie 1

1°) ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………

3°)

Partie 2

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Partie 3

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III.

1°) $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO}\right)=$ ………… $\left(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CD}\right)=$ …………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV.

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

V.

1°) ……………………………………………………………………………………………………

2°)

x_i		
$P(X = x_i)$		Total $= 1$

3°) ……………………………………………………………………………………………………

4°) ……………………………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

VI.

Partie 1

1°) a) ……….. (un seul résultat sans égalité) b) ……….. c) ………..

2°)

x_i		
$P(X = x_i)$		Total $= 1$

3°) ……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

Partie 2

1°) ……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

3°) a) …………………………………………………………………………………………………

b)

x_i		
$P(X = x_i)$		Total $= 1$

c) ……………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 27-1-2015

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^3-3x^2+12x+9}{2x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^3-6x-9}{x^3}$.

On ne demande d'écrire que 4 lignes de calcul.

f est une fonction rationnelle donc elle dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.

On applique la formule de dérivation d'un quotient de deux fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) &= \frac{\left(6x^2-6x+12\right)\times 2x^2 - \left(2x^3-3x^2+12x+9\right)\times 4x}{\left(2x^2\right)^2}\\
&= \frac{2x\left[x\left(6x^2-6x+12\right)-2\left(2x^3-3x^2+12x+9\right)\right]}{4x^4}\\
&= \frac{x\left(6x^2-6x+12\right)-2\left(2x^3-3x^2+12x+9\right)}{2x^3}\\
&= \frac{2x^3-12x-18}{2x^3}\\
&= \frac{x^3-6x-9}{x^3}
\end{aligned}$$

2°) a) Vérifier que pour tout réel *x*, on a : $x^3-6x-9 = (x-3)\left(x^2+3x+3\right)$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-3)\left(x^2+3x+3\right) &= x^3 + \cancel{3x^2} + 3x - \cancel{3x^2} - 9x - 9\\
&= x^3-6x-9
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-3)\left(x^2+3x+3\right) = x^3-6x-9$

b) Déterminer les coordonnées du (des) point(s) où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

On résout l'équation $f'(x) = 0$ (1).

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, (1) est successivement équivalente à :

$x^3-6x-9=0$

$(x-3)\left(x^2+3x+3\right)=0$ (d'après la question précédente)

$x=3$ (car le polynôme x^2+3x+3 a un discriminant strictement négatif donc n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$)

La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point $\mathrm{A}(3\,;4)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

On vérifie ce résultat en traçant la courbe représentative de *f* sur l'écran de la calculatrice graphique.

3°) Démontrer que la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point E d'abscisse – 1 passe par O.

Déterminons une équation de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point E d'abscisse – 1.

Une équation de *T* s'écrit $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ soit $y = 4(x+1)-4$ ce qui donne finalement $y = 4x$.

On en déduit que la tangente *T* passe par O.

On vérifie sur la calculatrice graphique l'équation réduite de *T*.

4°) Déterminer les coordonnées du point F de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente T' est parallèle à la droite Δ d'équation $y = x-3$.

La droite Δ a pour coefficient directeur 1.

On résout l'équation $f'(x)=1$ (2).

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, (2) est successivement équivalente à :

$\dfrac{x^3-6x-9}{x^3}=1$

$\cancel{x^3}-6x-9=\cancel{x^3}$

$x=-\dfrac{3}{2}$

On calcule ensuite $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-5$

La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ au point $\mathrm{F}\left(-\dfrac{3}{2}\,;-5\right)$.

II.

Il s'agit d'un problème d'optimisation avec modélisation d'une situation géométrique par une fonction (maximisation d'une longueur).

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x - x^2}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$, on a $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$.

On ne demande d'écrire que trois lignes de calculs.

f est une fonction rationnelle donc elle dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On applique la formule de dérivation d'un quotient de deux fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = \frac{(1-2x)\times(x+1) - (x - x^2)\times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x + 1 - 2x^2 - 2x - x + x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$$

2°) Recopier et compléter la phrase : « f' s'annule en ……………………………….. ».

f' s'annule en $-1+\sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2}$.

On calcule les racines du polynôme $-x^2 - 2x + 1$.
Le mieux est d'utiliser le discriminant réduit (qui est égal à 4).
Si l'on utilise le discriminant normal (qui est égal à 8), il faut simplifier comme suit.

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{-2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2} = \frac{\cancel{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{-\cancel{2}} = -1+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{-2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{-2} = \frac{\cancel{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{-\cancel{2}} = -1-\sqrt{2}$$

3°) Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ est les variations de *f*.

Calculer les extremums au brouillon et compléter le tableau de variations avec ces valeurs. On donnera les extremums sous la forme la plus simple possible.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
SGN de $-x^2-2x+1$		$-$	0^{num}	$+$	|	$+$	0^{num}	$-$	
SGN de $(x+1)^2$		$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$-$	0^{num}	$+$	||	$+$	0^{num}	$-$	
Variations de *f*		↘	$3+2\sqrt{2}$	↗	||	↗	$3-2\sqrt{2}$	↘	

On calcule les extremums à l'aide de l'expression initiale de *f*.

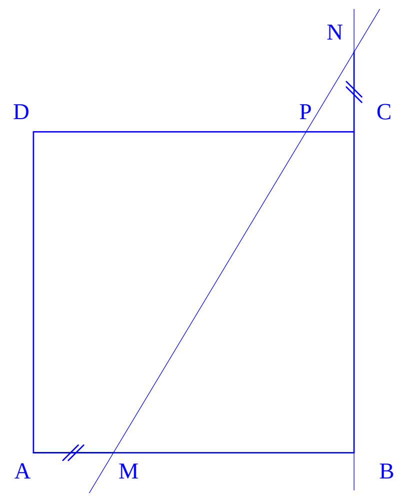
$$f\left(-1-\sqrt{2}\right) = \ldots = 3+2\sqrt{2}$$

$$f\left(-1+\sqrt{2}\right) = \ldots = 3-2\sqrt{2}$$

On vérifie les variations à l'aide de la calculatrice.

Partie 2

Une unité de longueur est fixée.
On considère un carré ABCD de côté 1. Soit M un point quelconque de [AB] et N le point de la demi-droite [BC) n'appartenant pas au segment [BC] tel que $CN = AM$. La droite (MN) coupe le segment [CD] en un point P.
L'objectif est de rendre la distance PC maximale.



1°) On pose $AM = x$.
Exprimer la distance PC en fonction de *x*.

Dans le triangle BMN, on sait que :
$P \in (MN)$;
$C \in (BN)$;
$(PC)//(BM)$

Donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{NP}{NM} = \dfrac{NC}{NB} = \dfrac{PC}{MB}$.

En particulier, on a : $\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{PC}{MB}$.

Par conséquent, $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{PC}{1-x}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} PC &= \frac{x(1-x)}{x+1} \\ &= \frac{x-x^2}{x+1} \end{aligned}$$

2°) Déterminer pour quelle position de M la distance PC est maximale. Que vaut alors la distance PC ?

On remarque que $PC = f(x)$ (pour $x \in [0\,;1]$).
On s'intéresse donc à la restriction de la fonction *f* à l'intervalle [0 ; 1].
On a les variations de *f* sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc obtient les variations de *f* sur $[0\,;1]$.
Il faut juste se souvenir que $\sqrt{2}-1 \in [0\,;1]$ (car $\sqrt{2} = 1,414...$).
D'après le tableau de variation établi à la partie 1, le minimum de *f* sur [0 ; 1] est égal à $3-2\sqrt{2}$ et il est atteint en $x = \sqrt{2}-1$.

La distance PC est donc maximale lorsque $AM = \sqrt{2}-1$; dans ce cas, elle vaut $3-2\sqrt{2}$.

Partie 3

Dans cette partie, on reprend la situation de la partie 2 et on s'intéresse à la position du point M pour laquelle la distance PC est maximale.

1°) On note E le symétrique de B par rapport à A. Le cercle Γ de centre E passant par D coupe le segment [AB] en un point Q.
Vérifier que le point Q est confondu avec le point M pour lequel la distance PC est maximale
On obtient ainsi une construction géométrique à la règle et au compas du point M qui rend PC maximale.
On ne demande pas d'effectuer la construction sur la copie.

On commence par calculer EQ.

$EQ = ED = \sqrt{2}$ (théorème de Pythagore)

Or les points E, A, Q sont alignés dans cet ordre.

Donc $AQ = EQ - EA = \sqrt{2}$.

On sait que $AM = \sqrt{2}-1$.

On a : $M \in [AB]$, $Q \in [AB]$ et $AM = AQ$. Par suite, $M = Q$.

2°) On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{ADM}$.
Déterminer la valeur exacte de α. On pourra s'intéresser à la nature du triangle EDM.

Le triangle EAD est rectangle isocèle donc $\widehat{AED} = \dfrac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Or le triangle EDM est isocèle en E.

Donc $\widehat{EDM} = \dfrac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{3\pi}{8}$.

Donc

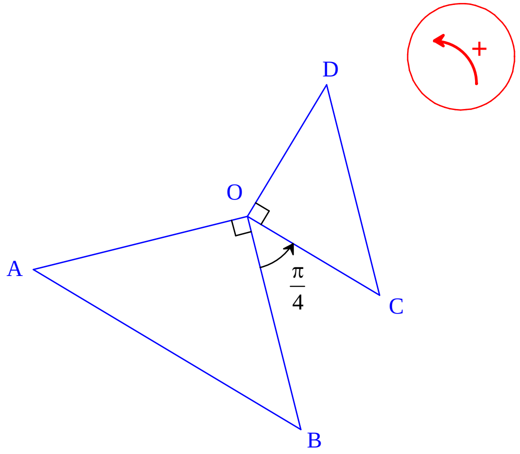
$$\begin{aligned} \widehat{ADM} &= \widehat{EDM} - \widehat{EDA} \\ &= \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Donc $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$.

Plusieurs élèves ont utilisé la tangente. Ils ont calculé $\tan \widehat{ADM} = \sqrt{2}-1$.
Ensuite, avec la calculatrice, ils ont obtenu la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ADM}$: 22,5 qui correspond à une mesure en radians de $\dfrac{\pi}{8}$.
Cette méthode quoique non satisfaisante a été comptée comme juste.
J'aurais dû mettre dans l'énoncé « sans utiliser la calculatrice ».

III.

Dans le plan orienté, on considère deux triangles OAB et OCD rectangles isocèles en O et directs.
On suppose de plus que $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$. Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.



1°) Compléter sans justifier les égalités suivantes :

$$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BO}\right)=-\frac{\pi}{4} \qquad\qquad \left(\overrightarrow{CO}\,;\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

2°) Déterminer par le calcul une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{OD}\right)$.
On détaillera les calculs (un calcul par ligne).
En déduire que la droite (OD) est la hauteur issue de O dans le triangle AOB.

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{OD}\right) &= \left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{CO}\right)+\left(\overrightarrow{CO}\,;\overrightarrow{OD}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BO}\right)+\left(-\overrightarrow{OB}\,;-\overrightarrow{OC}\right)+\left(-\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)+\pi\\
&= -\cancel{\frac{\pi}{4}}+\cancel{\frac{\pi}{4}}+\frac{\pi}{2}+\pi\\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

On a donc $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, (AB) $\perp$ (OD).

On en déduit que (OD) est la hauteur issue de O dans le triangle AOB.

IV.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé d'origine O.
On note A, B, A', B' les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (– 1 ; 0), (0 ; – 1).
Soit x un réel quelconque.
On note M et M' les points images respectifs sur $\mathcal{C}$ des réels x et – $2x$.
Aucune figure n'est demandée dans cet exercice.

1°) Dans cette question, on prend $x=\frac{43\pi}{6}$.
Donner la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\frac{43\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{48\pi-5\pi}{6}\\
&= 8\pi-\frac{5\pi}{6}\\
&= 4\times 2\pi-\frac{5\pi}{6}
\end{aligned}$$

On en déduit que la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

2°) On revient au cas où x est quelconque.
Déterminer tous les réels x tels que les points M et M' soient confondus.
En déduire les réels x de l'intervalle $[0\,;2\pi]$ tels que les points M et M' soient confondus.

□ Aide à la rédaction :

Raisonner par équivalence en rédigeant par chaîne d'équivalences :

M = M' si et seulement si …

si et seulement si …

si et seulement si …

M = M' si et seulement si $x=-2x+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

si et seulement si $3x=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

si et seulement si $x=\frac{2k\pi}{3} \quad (k\in\mathbb{Z})$

Les réels x de l'intervalle $[0\,;2\pi]$ tels que les points M et M' soient confondus s'obtiennent pour $k\in\{0, 1, 2, 3\}$.

Les valeurs sont : 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, 2π.

On peut vérifier sur la figure que pour chacune de ces valeurs de x les points M et M' sont confondus.

V.

Un stand de fête foraine propose de tourner une roue qui comporte 5 secteurs identiques.
Deux secteurs permettent de gagner un lot, un secteur permet de gagner deux lots et les autres ne font rien gagner.
Un joueur paie un droit d'entrée et fait tourner deux fois la roue.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lots gagnés à l'issue des deux parties.
Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré au brouillon.

On donnera tous les résultats demandés sous forme décimale.

1°) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ? Répondre par une phrase sans justifier.

X peut prendre les valeurs $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_5 = 4$.

Ces valeurs s'obtiennent par les décompositions suivantes :

$0+0=0$, $0+1=1$, $1+1=2$, $1+2=3$, $2+2=4$.

2°) Déterminer la loi de probabilité de X. On complètera sans expliquer le tableau donné sur la feuille de réponses.

Attention, on lance la roue deux fois.

x_i	0	1	2	3	4	
$P(X = x_i)$	0,16	0,32	0,32	0,16	0,04	Total = 1

3°) Déterminer la probabilité de gagner au moins deux lots.

$$\begin{aligned}P(\text{"gagner au moins 2 lots"}) &= P(X \geqslant 2)\\ &= P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\ &= 0,52\end{aligned}$$

4°) Calculer l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = 1\times 0,32 + 2\times 0,32 + 3\times 0,16 + 4\times 0,04 = 1,6$$

5°) Chaque lot coûte 5 € au forain.
À quelle valeur minimale le forain doit-il fixer le droit d'entrée pour espérer faire du bénéfice ? Justifier brièvement.

Soit x le droit d'entrée en euros.

Le forain ne peut espérer faire du bénéfice que si le prix du ticket est supérieur au prix moyen d'une partie.

Donc $x > 5\times E(X)$ soit $x > 5\times 1,6$.

Donc pour que le forain fasse du bénéfice le prix dans être supérieur à 8 €.

VI.

Partie 1

Trois amis, Pierre, Jacques et Rémi, ont imaginé le jeu suivant.
Chacun dispose d'une pièce équilibrée qu'il lance une fois, pour obtenir pile ou face.
Si le résultat d'un joueur est différent de celui des deux autres, il reçoit 1 € de chacun d'entre eux.
Dans tous les autres cas, la partie est nulle.

On donnera tous les résultats des probabilités demandées sous forme de fractions irréductibles.

1°) À l'aide d'un arbre, déterminer la probabilité :
a) que Pierre gagne ;
b) qu'il y ait un gagnant ;
c) que la partie soit nulle.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{4}$

2°) On note X le gain algébrique de Pierre en euros ; X prend donc les valeurs – 1, 0 et 2.
Donner la loi de probabilité de X.

x_i	2	– 1	0	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Total = 1

On complètera sans expliquer le tableau donné sur la feuille de réponses.

3°) Calculer l'espérance et la variance de X.

$$E(X) = 0$$

$$\begin{aligned}V(X) &= (-1)^2\times\frac{1}{2} + 0^2\times\frac{1}{4} + 2^2\times\frac{1}{4} - 0^2\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

On peut vérifier ces résultats à l'aide de la calculatrice graphique (commandes statistiques).

Partie 2

Dans cette partie, on considère n amis A_1, A_2, …, A_n (n est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 3).
La règle du jeu est la même qu'à la partie 1.
Chacun dispose d'une pièce équilibrée qu'il lance une fois, pour obtenir pile ou face.
Si le résultat d'un joueur est différent de celui des autres, il reçoit 1 € de chacun d'entre eux.
Dans tous les autres cas, la partie est nulle.

Dans cette partie, on généralise les résultats de la partie 1 à n joueurs.
On ne peut plus utiliser un arbre. On raisonne alors autrement en suivant les indications de l'énoncé.
On travaille en littéral.

1°) Justifier que la probabilité que A_1 gagne la partie est égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$.

A_1 gagne la partie dans les deux cas de figure suivants :

- il obtient pile et tous les autres joueurs obtiennent face ;

- il obtient face et tous les autres joueurs obtiennent pile.

Chacun de ces deux événements a pour probabilité $\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times...\times\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1^n}{2^n}=\frac{1}{2^n}$.

Ces deux événements sont incompatibles donc $P(\text{"A}_1\text{ gagne"})=2\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$.

2°) Exprimer en fonction de n la probabilité qu'il y ait un gagnant ; en déduire la probabilité que la partie soit nulle.

L'événement « il y a un gagnant » est la réunion des événements « A_1 gagne la partie », « A_1 gagne la partie », … « A_n gagne la partie ». Ces événements sont deux à deux incompatibles. Donc on peut écrire.

$$\begin{aligned}P(\text{"il y a un gagnant"})&=P(\text{"A}_1\text{ gagne"})+P(\text{"A}_2\text{ gagne"})+...+P(\text{"A}_n\text{ gagne"})\\&=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\quad(n\text{ termes})\\&=\frac{n}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{"la partie est nulle"})&=1-P(\text{"il y a un gagnant"})\\&=1-\frac{n}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

3°) On note X le gain algébrique en euros de l'un quelconque des joueurs, par exemple A_1.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ? Répondre par une phrase sans justifier.

Les valeurs prises par X sont – 1, 0 et $n-1$.

b) Donner la loi de probabilité de X.
On complètera sans expliquer le tableau donné sur la feuille de réponses.

x_i	-1	0	$n-1$	
$P(X=x_i)$	$\frac{n-1}{2^{n-1}}$	$1-\frac{n}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	Total $=1$

$$\begin{aligned}P(X=-1)&=P(\text{"A}_2\text{ gagne"})+...+P(\text{"A}_n\text{ gagne"})\\&=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\\&=(n-1)\times\frac{1}{2^{n-1}}\\&=\frac{n-1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X=0)&=P(\text{"la partie est nulle"})\\&=1-\frac{n}{2^n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X=n-1)&=P(\text{"A}_1\text{ gagne"})\\&=\frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

On vérifie aisément que $P(X=-1)+P(X=0)+P(X=n-1)=1$

c) Calculer l'espérance de X.

$$\begin{aligned}E(X)&=-1\times\frac{n-1}{2^{n-1}}+0\times\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)+(n-1)\times\frac{1}{2^{n-1}}\\&=-\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^{n-1}}\\&=0\end{aligned}$$

Cela nous permet de vérifier le résultat de la question 3°) de la partie 1.

d) Démontrer que la variance de X est égale à $\frac{n(n-1)}{2^{n-1}}$.

$$\begin{aligned}V(X)&=(-1)^2\times\frac{n-1}{2^{n-1}}+0^2\times\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)+(n-1)^2\times\frac{1}{2^{n-1}}\\&=\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}\\&=\frac{(n-1)+(n-1)^2}{2^{n-1}}\\&=(n-1)\times\frac{n}{2^{n-1}}\\&=\frac{n\times(n-1)}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

Remarque :

Grâce à cette formule, on peut retrouver le résultat obtenu pour la variance de X calculée dans la partie 1 dans le cas où $n=3$.