DM sur les moyennes

Partie 1

Pour tous nombres réels strictement positifs x et y on pose :

$a = \frac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique)

$g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique)

$q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ (moyenne quadratique)

$h = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}}$ (moyenne harmonique, on vérifiera que, pour tous x et y, $h = \frac{2xy}{x+y}$)

On pose enfin $s = \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2$.

1°) Calculer ces cinq nombres pour $x = y$.

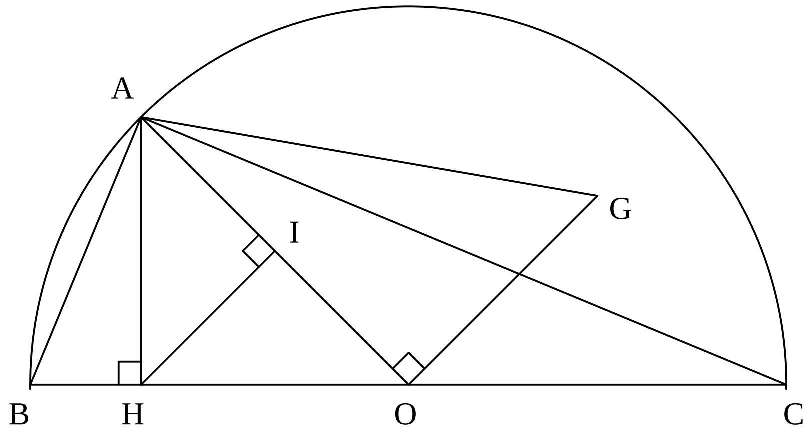
2°) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

x	y	a	g	h	q	s
4	16					
14		8				
12			6			
4				6		
7					5	
9						4

3°) Quelle conjecture peut-on énoncer sur l'ordre des moyennes a, g, h et q de deux nombres positifs ? Proposer une démonstration pour une des inégalités envisagées.

Partie 2

On considère un triangle ABC rectangle en A. On note O le milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A. Le point I est le projeté orthogonal de H sur (AO) et le point G est le point de la perpendiculaire en O à (AO) situé dans le demi-plan de frontière (AO) ne contenant pas H et tel que $HO = OG$. On pose $HB = x$ et $HC = y$.



1°) Établir que $AH = \sqrt{xy}$ (dans tout triangle rectangle, la hauteur est moyenne géométrique des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse). On pourra utiliser le théorème de Pythagore successivement dans trois triangles rectangles.

2°) Démontrer que $OA = \dfrac{x+y}{2}$.

3°) En calculant $\cos\widehat{HAI}$ de deux manières différentes, établir que $AH^2 = AI \times AO$.
Calculer AI en fonction de *x* et *y*.

4°) Démontrer que $AG = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$.

5°) Comparer les distances qui viennent d'être calculées. Que retrouve-t-on ?

Fin du DM sur les moyennes