Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

I. Irrationalité de $\sqrt{2}$

Nous allons démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Nous allons effectuer un raisonnement par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

$\sqrt{2}$ peut donc s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux.

On a donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (1).

(1) donne alors $2 = \frac{a^2}{b^2}$ soit $a^2 = 2b^2$ (2).

(2) permet de dire que a^2 est pair.
Par conséquent, a est pair.
On peut donc écrire $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

En remplaçant a par $2k$ dans (2), on obtient : $(2k)^2 = 2b^2$.
D'où $b^2 = 2k^2$.
Cette dernière égalité permet de dire que b^2 est pair.
Par conséquent, b est pair, ce qui est absurde puisque l'on a supposé que a et b sont premiers entre eux.

Historique : La crise des irrationnels (250 avant Jésus-Christ)

Proclus, commentant des textes grecs, relate que le mathématicien qui découvrit que $\sqrt{2}$ était rationnel, violant un secret des dieux, périt dans un naufrage.

II. Irrationalité de $\sqrt{3}$

Nous allons démontrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Supposons que $\sqrt{3}$ est rationnel.

$\sqrt{3}$ peut donc s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ où *a* et *b* sont deux entiers naturels premiers entre eux.

On a donc $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ (1).

(1) donne alors $3=\frac{a^2}{b^2}$ soit $a^2=3b^2$ (2).

(2) permet de dire que $3 \mid a^2$.
Comme 3 est premier, on en déduit que $3 \mid a$.

On peut donc écrire $a=3k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

En remplaçant *a* par 3*k* dans (2), on obtient : $(3k)^2=3b^2$.
D'où $b^2=3k^2$.
On a donc $3 \mid b^2$.

Comme 3 est premier, on en déduit que $3 \mid b$.

Ce qui est absurde car *a* et *b* sont premiers entre eux

Historique :

Le néo-platonisme est un mouvement philosophique du I^er^ siècle après Jésus-Christ qui reprend les idées de Platon à la lumière de la religion chrétienne.

III. Irrationalité de $\sqrt{6}$

Nous allons démontrer que $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel.

On utilise le même raisonnement par l'absurde que pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

On ne peut évidemment pas dire « $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels donc leur produit $\sqrt{6}$ est irrationnel ».

Supposons que $\sqrt{6}$ est rationnel.

On suppose que $\sqrt{6}=\dfrac{a}{b}$ avec $(a,b)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ et *a* et *b* premiers entre eux.

(1) donne alors $6=\dfrac{a^2}{b^2}$ soit $a^2=6b^2 \quad (1')$.

Or

2 | a^2 donc 2 | *a* (car 2 est un nombre premier)

3 | a^2 donc 3 | *a* (car 3 est un nombre premier)

Par suite, comme 2 et 3 sont premiers entre eux, 6 | *a*.

D'où $a=6a' \quad$ (2).

$(1')$ et (2) donnent $6b^2=36(a')^2$ d'où $b^2=6(a')^2$.

On en déduit 6 | *b*.

6 | *a* et 6 | *b* donc *a* et *b* ne sont pas premiers entre eux ce qui est absurde.

Variante pour la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (démonstration faite en classe le 3-3-2015).

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel c'est-à-dire que l'on peut écrire $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ (1) avec $(a,b)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$.
On suppose de plus que a et b sont premiers entre eux.

(1) donne alors $2=\frac{a^2}{b^2}$ soit $a^2=2b^2 \quad (1')$.

D'après $(1')$, $2 \mid a^2$ donc, comme 2 est premier, $2 \mid a$.

Par suite, $a=2a'$ (2) où $a'\in\mathbb{N}^*$.

Compte tenu de (2), $(1')$ donne alors $2b^2=(2a')^2$ d'où $2b^2=4a'^2$ donc $b^2=2a'^2 \quad (1'')$.

D'après $(1'')$, $2 \mid b^2$ donc, comme 2 est premier, $2 \mid b$.

$2 \mid a$ et $2 \mid b$ donc a et b ne sont pas premiers entre eux.