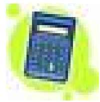
TS1

Contrôle du mardi 20 janvier 2015 (50 min)



Prénom : …………………………………… **Nom :** …………………………………… **Note : …. / 20**

I. (7 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 4\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 5\sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Linéariser $f(x)$. On démontrera que pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x$.

……

……

……

……

2°) Soit α le réel de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Calculer la valeur exacte de $\cos\alpha$. On ne demande pas de détailler les calculs.

$\cos\alpha =$ .... (un seul résultat)

3°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}\sin(2x+\alpha)$.

En déduire (sans utiliser la dérivée) le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$ en expliquant brièvement.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (2 points)

1°) On pose $I = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Quel est le sens de variation de la fonction cosinus sur I ? En déduire celui de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\cos x}$ sur I.

La fonction cosinus est …………………………………………………………… sur I.

Donc la fonction f est …………………………………………………………… sur I.

2°) On pose $J = \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

Quel est le sens de variation de la fonction sinus sur J ? En déduire celui de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ sur J.

La fonction sinus est …………………………………………………………… sur J.

Donc la fonction g est …………………………………………………………… sur J.

III. (3 points)

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 1$. Le cercle de centre A et de rayon AB coupe le segment [AC] en D. On note x la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$. On note également $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle ABC, $\mathcal{A}_2$ l'aire du secteur circulaire de centre A limité par l'arc $\overset{\frown}{BD}$ et $\mathcal{A}_3$ l'aire du triangle ABD.

Compléter les égalités suivantes en fonction de x (une seule expression à chaque fois) :

$\mathcal{A}_1 =$ .... $\mathcal{A}_2 =$ .... $\mathcal{A}_3 =$ ....

Comparer sans justifier $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$.

En déduire une inégalité entre x, $\sin x$ et $\tan x$ pour $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

IV. (8 points)

Soit ABCDEFGH un cube. Soit I le milieu de [BF].

À tout réel k on fait correspondre les point M et N définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{MF} = k\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BA}$.

1°) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{FB} + k\overrightarrow{GE}$. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{GE}$?

2°) Soit Q le milieu de [MN].

Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{BD}$.

En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IQ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires. Quel est l'ensemble des points Q lorsque k décrit $\mathbb{R}$?

Consignes orales

III. Exprimer $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ en fonction de x uniquement.

Corrigé

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto 4\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 5\sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Linéariser $f(x)$. On démontrera que pour tout réel x on a : $f(x) = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{3}{2}\sin 2x$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= 4\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 5\sin^2 x \\ &= 4\times\frac{1+\cos 2x}{2} - 3\times\frac{\sin 2x}{2} + 5\times\frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= 2(1+\cos 2x) - 3\times\frac{\sin 2x}{2} + 5\times\frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x\end{aligned}$$

2°) Soit α le réel de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
Calculer la valeur exacte de $\cos\alpha$. On ne demande pas de détailler les calculs.

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ (un seul résultat)}$$

D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.
D'où $\cos^2\alpha + \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1$ ce qui donne immédiatement $\cos^2\alpha = \dfrac{9}{10}$.

On en déduit que $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ ou $\cos\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Or $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc $\cos\alpha \geqslant 0$.

Finalement, on peut écrire $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Une mauvaise méthode consiste à « trouver » α avec la calculatrice et à utiliser la valeur approchée obtenue avec la calculatrice pour calculer $\cos\alpha$.

3°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) = \dfrac{9}{2} - \dfrac{\sqrt{10}}{2}\sin(2x+\alpha)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x \\ &= \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\sin 2x \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \cos 2x \times \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \\ &= \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}(\sin 2x \times \cos\alpha + \cos 2x \times \sin\alpha) \\ &= \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}\sin(2x+\alpha)\end{aligned}$$

En déduire (sans utiliser la dérivée) le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$ en expliquant brièvement.

On procède par inégalités successives.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin(2x+\alpha) \leqslant 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{\sqrt{10}}{2} \leqslant -\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(2x+\alpha) \leqslant \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

On a démontré que f est bornée par $\dfrac{9-\sqrt{10}}{2}$ et $\dfrac{9+\sqrt{10}}{2}$.

La borne $\dfrac{9-\sqrt{10}}{2}$ est atteinte en tout réel x tel que $\sin(2x+\alpha) = 1$. C'est donc le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
La borne $\dfrac{9+\sqrt{10}}{2}$ est atteinte en tout réel x tel que $\sin(2x+\alpha) = -1$. C'est donc le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

II.

1°) On pose $\mathrm{I} = \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Quel est le sens de variation de la fonction cosinus sur I ? En déduire celui de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\cos x}$ sur I.

La fonction cosinus est strictement décroissante sur I.

Donc la fonction f est strictement décroissante sur I.

2°) On pose $\mathrm{J} = \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

Quel est le sens de variation de la fonction sinus sur J ? En déduire celui de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ sur J.

La fonction sinus est strictement décroissante sur J.

Donc la fonction g est strictement croissante sur J.

III.

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\mathrm{AB} = 1$. Le cercle de centre A et de rayon AB coupe le segment [AC] en D. On note x la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$. On note également $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle ABC, $\mathcal{A}_2$ l'aire du secteur circulaire de centre A limité par l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ et $\mathcal{A}_3$ l'aire du triangle ABD.

Compléter les égalités suivantes en fonction de x (une seule expression à chaque fois) :

$\mathcal{A}_1 = \dfrac{\tan x}{2}$ $\qquad$ $\mathcal{A}_2 = \dfrac{x}{2}$ $\qquad$ $\mathcal{A}_3 = \dfrac{\sin x}{2}$

Comparer sans justifier $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$.

$\mathcal{A}_3 < \mathcal{A}_2 < \mathcal{A}_1$

En déduire une inégalité entre x, $\sin x$ et $\tan x$ pour $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\qquad \sin x < x < \tan x$

IV.

Soit ABCDEFGH un cube. Soit I le milieu de [BF].

À tout réel k on fait correspondre les point M et N définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{MF} = k\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BA}$.

1°) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{FB} + k\overrightarrow{GE}$. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{GE}$?

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BN} \\
&= k\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + k\overrightarrow{BA} \\
&= k\left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{FB} \\
&= k\left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE}\right) + \overrightarrow{FB} \quad \text{car } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{FE} \\
&= \overrightarrow{FB} + k\overrightarrow{GE}
\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{GE}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{GE}$ sont coplanaires.

2°) Soit Q le milieu de [MN].

Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{BD}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} &= \cancel{\overrightarrow{IF}} + \overrightarrow{FM} + \cancel{\overrightarrow{IB}} + \overrightarrow{BN} \\
&= k\overrightarrow{FG} + k\overrightarrow{BA} \\
&= k\left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BA}\right) \\
&= k\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right) \\
&= k\overrightarrow{BD}
\end{aligned}$$

En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IQ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires. Quel est l'ensemble des points Q lorsque k décrit $\mathbb{R}$?

On sait que Q le milieu de [MN].

Donc $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{IQ}$ (propriété du cours)

Donc $2\overrightarrow{IQ} = k\overrightarrow{BD}$

D'où $\overrightarrow{IQ} = \dfrac{k}{2}\overrightarrow{BD}$ (1).

Lorsque k décrit $\mathbb{R}$, $\dfrac{k}{2}$ décrit $\mathbb{R}$.

Donc l'ensemble des points Q lorsque k décrit $\mathbb{R}$ est la droite passant par I parallèle à (BD) (ou droite de repère $\left(\mathrm{I}, \overrightarrow{BD}\right)$).