TS1

Contrôle du jeudi 6-2-2014 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note :** ……../ **20**

I. (4 points) Barème : + 1 point : réponse juste ; – 1 point : réponse fausse ; 0 : absence de réponse.

Vrai ou faux ?

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1°) L'ensemble de définition de f est $E =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$.

2°) Pour tout réel x de E, on a : $f'(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

3°) Pour tout réel x de E, on a : $f(x) = -\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

4°) Pour tout réel x de E, on a : $f(x) = \ln x - \ln(x+1)$.

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	**Total**
Réponse					

II. (1 point)

Soit x et y deux réels quelconques. Compléter l'équivalence :

$$\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow y = \text{............................}$$

III. (2 points)

Déterminer l'ensemble S des solutions de l'inéquation $\ln(x-1)+\ln(x+4) \leqslant \ln 6$.

$$S = \text{.............................}$$

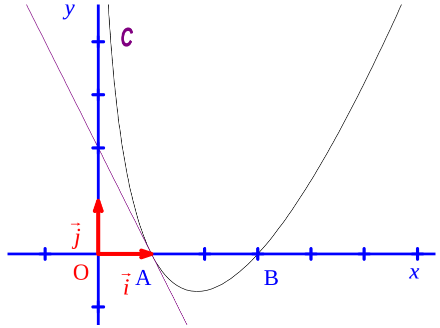
IV. (6 points : 2 points + 2 points + 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto (ax+b)\ln x$ où a et b sont des réels.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points A(1 ; 0) et B(3 ; 0).

La tangente à $\mathcal{C}$ au point A coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.



1°) Lire et comprendre la démonstration suivante permettant de déterminer les valeurs de a et b. Tous les calculs sont justes (inutile de vérifier).

> f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
>
> $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = a\ln x + \dfrac{1}{x}(ax+b)$
>
> La tangente à $\mathcal{C}$ au point A a pour coefficient directeur – 2 donc $f'(1) = -2$ d'où $a+b=-2$ (1).
>
> B $\in \mathcal{C}$ donc on a $f(3)=0$ d'où $(3a+b)\ln 3 = 0$ (2)
>
> $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a-2 \\ (2a-2)\ln 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a-2 \\ 2a\ln 3 - 2\ln 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a-2 \\ 2a\ln 3 = 2\ln 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=1\end{cases}$
>
> Ainsi, $f(x) = (x-3)\ln x$.

Pourquoi est-il maladroit d'avoir conservé ln 3 dans la deuxième équation des trois systèmes équivalents au système formé par les équations (1) et (2) ?

Réécrire une résolution plus simple de ce système (écrire le système en entier et pas seulement la deuxième ligne).

………..

………..

………..

………..

………..

2°) On suppose dans toute la suite que a et b ont les valeurs trouvées précédemment.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

………

………

………

………

3°) Préciser les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $y=3-x$.

………

………

………

………

V. (4 points : 2 points + 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\cos x}$.

1°) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VI. (3 points)

Soit ABCDEFGH un parallélépipède. On note I le centre de la face ABCD.
Démontrer à l'aide de la définition (sans utiliser de calcul vectoriel) que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ sont coplanaires. On demande ne pas « créer » de points, ni d'utiliser un repère.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 6-2-2014

I.

Question	1°)	2°)	3°)	4°)
Réponse	V	F	V	F

Pour la question 4°), il fallait penser que l'égalité $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$ n'est valable que pour $a>0$ et $b>0$.

On pouvait représenter la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)-\ln x$.
On peut ainsi « lire » l'ensemble de définition sur l'écran.

On remarque que $\ln x-\ln(x+1)$ n'est pas définie sur $]-\infty\,;-1[$. On voit « ERROR » sur l'écran.

II. $e^y-e^x=1 \Leftrightarrow y=\ln(e^x+1)$

III. $S=]1\,;2]$

Il fallait d'abord commencer par déterminer l'ensemble de résolution.

IV.

1°)

$\ln 3\neq 0$

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-a-2\\(2a-2)\ln 3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-a-2\\2a-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-3\\a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-3\\a=1\end{cases}$$

2°)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(x-3)=-3\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty.$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

On pouvait aussi développer l'expression de *f* ; on faisait alors apparaître une limite de référence de la fonction logarithme népérien. C'était un peu plus long et inutile puisque la limite pouvait se déduire sur l'expression initiale de *f*.

3°)

L'équation aux abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D s'écrit : $f(x)=3-x$ (1).

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow (x-3)\ln x=3-x\\ &\Leftrightarrow (x-3)\ln x+x-3=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)(\ln x+1)=0\\ &\Leftrightarrow x-3=0 \text{ ou } \ln x+1=0\\ &\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } \ln x=-1\\ &\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } x=e^{-1}\\ &\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } x=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

Donc les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont 3 et $\frac{1}{e}$.

Il fallait bien se garder de simplifier au début les deux membres de l'équation par $x-3$.

V.

$f : x \mapsto e^{\cos x}$

1°) **Démontrons que, pour tout réel *x*, on a : $\frac{1}{e}\leqslant f(x)\leqslant e$.**

On procède par inégalités successives.
Il s'agit donc d'une démarche déductive (constitué de déductions successives).
Par conséquent, les mots de liaisons sont des « donc », des « d'où »…

Il est vrai qu'il y a équivalences mais on n'écrit que des implications.

On a : $-1\leqslant \cos x\leqslant 1$.
D'où $e^{-1}\leqslant e^{\cos x}\leqslant e^{1}$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $\frac{1}{e}\leqslant f(x)\leqslant e$.

Question :

Peut-on résoudre la question 1°) du V. par équivalences ?

On nous demande de démontrer une inégalité.
Dans ce type de démarche, on procède par inégalités successives.
Par conséquent, les mots de liaison sont des « donc ».

Objection de Diego de Blétry : « Mais l'un implique l'autre ! ».
Réponse : « C'est exact. Mais nous nous intéressons juste à la démarche déductive. On utilise "donc" ».

2°) **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$ (1).**

$$(1) \Leftrightarrow \cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

VI.

Démontrons que les vecteurs $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{AH}$ sont coplanaires.

Comme nous le demande l'énoncé, on procède par égalités de vecteurs (pas de création de points ni de calculs vectoriels).

On a : $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$ (par propriété du parallélépipède).

Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BG}$ sont dans le plan (BDG).

Donc $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{AH}$ sont coplanaires.

On pouvait aussi établir que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AH}$ mais l'énoncé demandait de ne pas effectuer de calcul vectoriel donc cette méthode ne convenait pas.

Version 1 trouvée dans une copie :

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$

$\overrightarrow{HF} = 2\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{IG}$

(BG) $\subset$ (IBG) donc $\overrightarrow{AH} \in (\text{IBG})$

(IB) $\subset$ (IBG) donc $\overrightarrow{HF} \in (\text{IBG})$

(IG) $\subset$ (IBG) donc $\overrightarrow{IG} \in (\text{IBG})$

Version 2 trouvée dans une copie :

Soit J le centre de la face EFGH.
ABDCEFGH est un parallélépipède donc on a : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{IG}$.
De plus, (HF) est une diagonale de EFGH donc J $\in$ (HF).
Donc $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires d'où ….

On ne dit pas que :

- des vecteurs sont contenus dans un plan ;
- des vecteurs appartiennent à un plan ;
- des vecteurs sont inclus dans un plan.

On dit qu'ils admettent un représentant dont l'origine et l'extrémité sont dans un plan *P*.

On aurait pu recourir à un repère (cf. Louis Charles ou Baptiste Salaun).

Paul Monroux

$$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AH} \quad \text{(car ABCDEFGH est un parallélépipède)}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{AH}$ sont coplanaires.