$1^{\text{ère}}$ S1

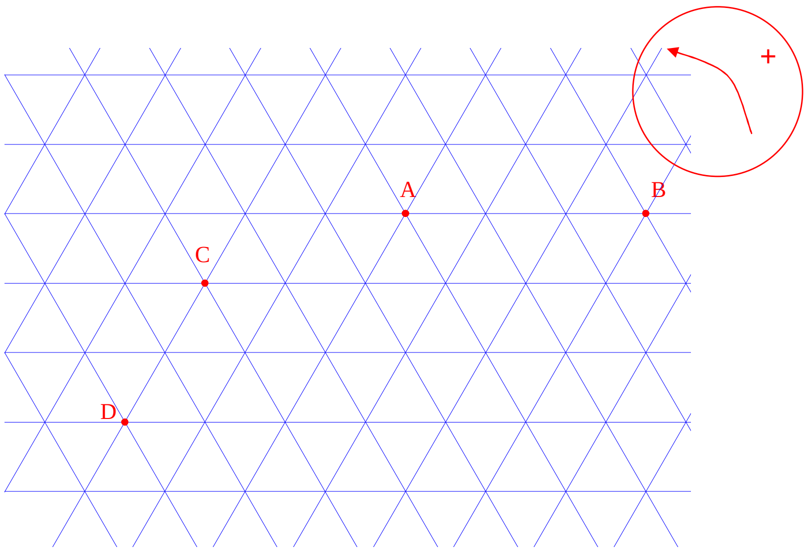
Contrôle du vendredi 16 janvier 2015 (40 min)

Prénom : ……………………………….…… **Nom :** ………………………………..……

Note : …. / 20

I. (4 points)

Dans le plan orienté, on considère le maillage ci-dessous constitué de triangles équilatéraux.
On prend pour unité la longueur commune aux côtés des triangles équilatéraux constituant ce maillage.



1°) Compléter en donnant la mesure principale en radians.

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2°) Placer les points E, F, G définis par :

$$AE=2 \text{ et } \left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{\pi}{3}\ ;\ CF=1 \text{ et } \left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CF}\right)=\frac{4\pi}{3}\ ;\ AG=3 \text{ et } \left(\overrightarrow{AG}\,;\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

II. (2 points)

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), A'(– 1 ; 0), B'(0 ; – 1).

On note C l'image de $\frac{5\pi}{4}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.

Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

…………………………………..

III. (8 points)

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2(12-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x)=$ .... (un seul résultat sous forme factorisée)

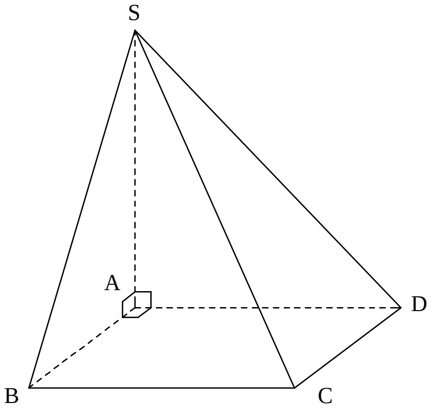
2°) Compléter la phrase :

f' s'annule en …………………………………………… .

3°) Étudier dans un même tableau le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
On calculera au brouillon les extremums locaux.
On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

Partie 2

La pyramide au verso a pour base un rectangle ABCD de périmètre 24 cm et pour hauteur le segment [SA] de longueur triple de celle du segment [AB]. On note x la longueur du segment [AB] en centimètres.



1°) Donner sans justifier l'ensemble I des valeurs que peut prendre *x*.

I = ...

2°) Démontrer que pour tout réel *x* appartenant à I, le volume de la pyramide SABCD exprimé en cm^3, est donné par $V = x^2(12 - x)$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

3°) Pour quelle valeur de AB le volume de cette pyramide est-il maximal ? Justifier brièvement.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

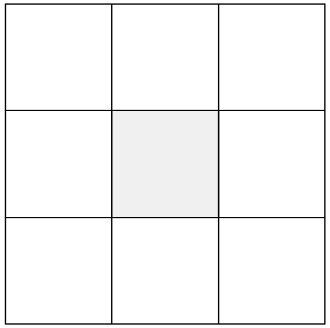
…………………………………………………………………………………………………

4°) Déterminer les valeurs décimales approchées à 0,01 près par défaut des réels *x* tels que le volume de la pyramide soit égal à 150 cm^3. Répondre sans faire de phrase.

…………………………………………………………………………………………………

IV. (6 points)

Un tireur tire parfaitement au hasard sur la cible ci-dessous, sans jamais la rater. Tous les carrés ont le même côté.
Le carré central est de couleur grise. Les autres carrés sont de couleur blanche et forment la « zone blanche ».



1°) Dans cette question, le tireur tire trois fois sur la cible.
Calculer la probabilité qu'il atteigne exactement deux fois le carré central.
Donner le résultat directement sous forme d'une fraction irréductible.

……………………

2°) Dans cette question, le tireur tire *n* fois, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Exprimer en fonction de *n* la probabilité p_n qu'il atteigne au moins une fois le carré central.

$p_n =$ .... (un seul résultat)

b) Exprimer en fonction de *n* la probabilité p'_n qu'il atteigne que le carré central à chaque fois ou que la zone blanche à chaque fois.

$p'_n =$ .... (un seul résultat)

Consignes et conseils donnés à l'oral

I. Ne rien écrire sur la figure en dehors des noms des points qu'on demande de placer.

III. Partie 2

2°) Pour le calcul du volume de la pyramide, pas de formule hors contexte.
Appliquer la formule avec les noms des points.
Utiliser les noms de points.

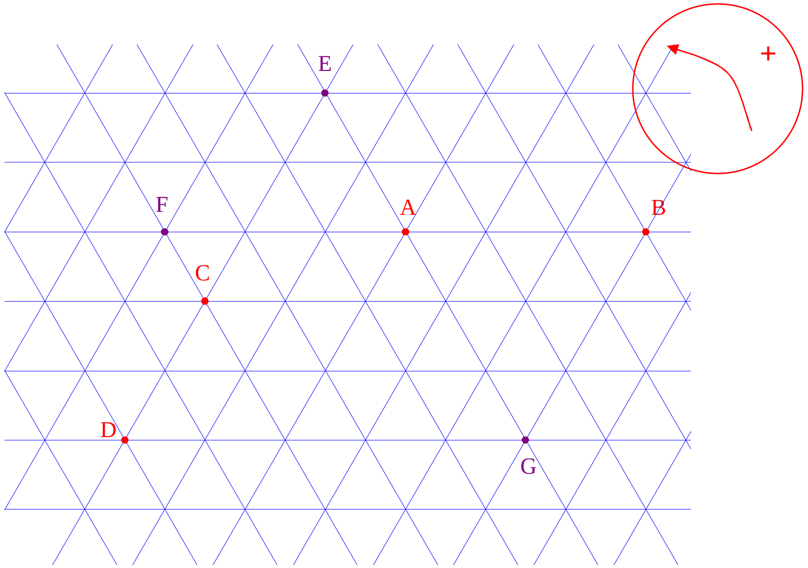
3°) Attention à la rédaction :

« La fonction f est … » et pas « La fonction $f(x)$ est … ».

Corrigé du contrôle du 16-1-2015

I.

Dans le plan orienté, on considère le maillage ci-dessous constitué de triangles équilatéraux.
On prend pour unité la longueur commune aux côtés des triangles équilatéraux constituant ce maillage.



1°) Compléter en donnant la mesure principale en radians.

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{2\pi}{3}$$

2°) Placer les points les points E, F, G définis par :

$AE=2$ et $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{\pi}{3}$; $CF=1$ et $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CF}\right)=\frac{4\pi}{3}$; $AG=3$ et $\left(\overrightarrow{AG}\,;\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

Attention à la condition $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{\pi}{3}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE}$ n'ont pas la même origine.
Il faut déplacer l'un des deux pour les ramener à la même origine.

II.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), A'(– 1 ; 0), B'(0 ; – 1).

On note C l'image de $\frac{5\pi}{4}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.

Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

$$\left[-\pi\,;-\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$$

Il y a deux difficultés :

1. On fait une figure (voir contrôle précédent).
On imagine le trajet de $-\pi$ à π.
On voit que le trajet se fait en deux fois : de A' à C dans le sens direct puis de B à A' dans le sens direct.

2. C est l'image de $\frac{5\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique donc c'est aussi l'image de $-\frac{3\pi}{4}$.

($\frac{5\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$ ont la même image ; $\frac{5\pi}{4}\in[0\,;2\pi]$; $-\frac{3\pi}{4}\in[-\pi\,;\pi]$)

On notera que $-\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right)$.

III.

Il s'agit d'un problème d'optimisation (avec modélisation d'une situation géométrique par une fonction).

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2(12-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=3x(8-x)$ (un seul résultat sous forme factorisée)

2°) Compléter la phrase :

f' s'annule en 0 et en 8.

3°) Étudier dans un même tableau le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
On calculera au brouillon les extremums locaux.
On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

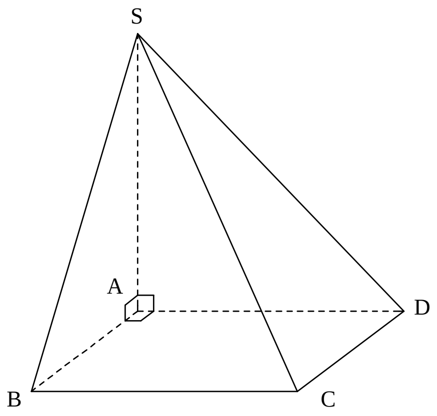
x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
Signe de $3x$		–	0	+		+	
Signe de $8-x$		+		+	0	–	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	0	–	
Variations de f		↘	0	↗	256	↘	

On calcule les extremums locaux en 0 et en 8.

On vérifie les variations à l'aide de la calculatrice graphique.

Partie 2

La pyramide au verso a pour base un rectangle ABCD de périmètre 24 cm et pour hauteur le segment [SA] de longueur triple de celle du segment [AB]. On note x la longueur du segment [AB] en centimètres.



1°) Donner sans justifier l'ensemble I des valeurs que peut prendre x.

$$\mathrm{I} =]0\,;12[$$

2°) Démontrer que pour tout réel x appartenant à I, le volume de la pyramide SABCD exprimé en cm^3, est donné par $\mathrm{V} = x^2(12-x)$.

On sait que la volume d'une pyramide est donnée par la formule $\dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

$$\mathrm{V} = \frac{\mathscr{A}_{\mathrm{ABCD}} \times \mathrm{SA}}{3}$$

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AD} \times \mathrm{SA}}{3}$$

Par hypothèse, on a : $\mathscr{P}_{\mathrm{ABCD}} = 24 \text{ cm}$.

Notons y la longueur en cm du segment [AD].

On a donc $2x + 2y = 24$ d'où $y = 12 - x$.

$$\mathrm{V} = \frac{x \times (12-x) \times 3x}{3}$$
$$= x^2(12-x)$$

3°) Pour quelle valeur de AB le volume de cette pyramide est-il maximal ? Justifier brièvement.

D'après la question précédente, $\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{V} = f(x)$.
On considère donc la restriction de f à l'intervalle I (cela signifie que l'on s'intéresse à la fonction f sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;12[$).
D'après la question 3°) de la partie 1, le maximum de f sur I est égal à 256 et il est atteint pour $x = 8$.

Donc le volume de la pyramide est maximal pour $\mathrm{AB} = 8 \text{ cm}$; il vaut alors 256 cm^3.

x	0		8		12
Variations de f	0	↗	256	↘	0

4°) Déterminer les valeurs décimales approchées à 0,01 près par défaut des réels x tels que le volume de la pyramide soit égal à 150 cm^3. Répondre sans faire de phrase.

4,46 et 10,68

L'énoncé ne disait pas comment résoudre la question.
Il fallait penser à utiliser la calculatrice. En effet, l'équation $f(x) = 150$ s'écrit $x^2(12-x) = 150$ qui est une équation du troisième degré (car elle est équivalente à $x^3 - 12x^2 + 150 = 0$).
Il n'est donc pas possible de la résoudre de manière exacte.
Aussi doit-on s'orienter vers une résolution approchée.

On trace la représentation graphique de la fonction f en choisissant une fenêtre adaptée : entre 0 et 12 pour x et entre 0 et 268 pour y.

On trace la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto 150$ (fonction constante).

On observe qu'il y a deux points d'intersection.

On appuie sur les touches 2nde trace (calculs).
On sélectionne ensuite 5 : Intersect.

On lit les valeurs suivantes :

$$x_1 = 4,46036\ldots \text{ et } x_2 = 10,68653\ldots$$

On retiendra que :

- on ne sait pas résoudre une équation du troisième degré (de manière exacte) ;

- on est obligé d'utiliser la calculatrice pour résoudre une équation du troisième degré (de manière approchée).

Il est à noter que l'équation $f(x) = 150$ admet en fait trois solutions dans $\mathbb{R}$.
Les deux plus grandes (qui correspondent à x_1 et x_2) sont dans I ; la plus petite (que nous noterons x_3) est inférieure à 0.
On pourrait déterminer une valeur approchée de x_3 grâce à la calculatrice en modifiant la fenêtre.

On peut par exemple utiliser la fenêtre :

$x_{\min} = -10$
$x_{\max} = 12$
$y_{\max} = -10$
$y_{\max} = 300$

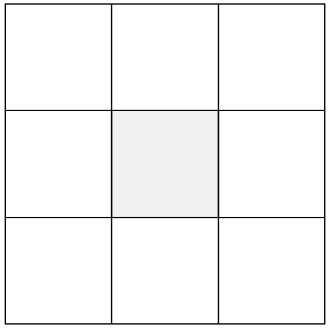
On trouve :

$$x_3 = -3{,}14690...$$

On peut démontrer que les solutions x_1, x_2, x_3 sont irrationnelles.

IV.

Un tireur tire parfaitement au hasard sur la cible ci-dessous, sans jamais la rater. Tous les carrés ont le même côté.
Le carré central est de couleur grise. Les autres carrés sont de couleur blanche et forment la « zone blanche ».



1°) Dans cette question, le tireur tire trois fois sur la cible.
Calculer la probabilité qu'il atteigne exactement deux fois le carré central.
Donner le résultat directement sous forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{8}{243}$$

$$\text{(calcul : } 3\times\left(\frac{1}{9}\right)^2\times\frac{8}{9}\text{ ; il s'agit d'un schéma de Bernoulli)}$$

2°) Dans cette question, le tireur tire *n* fois, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Exprimer en fonction de *n* la probabilité p_n qu'il atteigne au moins une fois le carré central.

$$p_n = 1-\left(\frac{8}{9}\right)^n \quad \text{(un seul résultat)}$$

On raisonne par événement contraire.

b) Exprimer en fonction de *n* la probabilité p'_n qu'il atteigne que le carré central à chaque fois ou que la zone blanche à chaque fois.

$$p'_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n \quad \text{(un seul résultat)}$$

Il fallait bien comprendre l'énoncé
Le « ou » traduit la réunion.
Il s'agit de deux événements incompatibles.
Donc on effectue une addition.