**TS1**

# Contrôle du mardi 13 janvier 2015
**(50 minutes)**

**Prénom et nom :** ……………………………………………………

**Note : …… /20**

---

## I. (10 points)

Pour tout réel $a$, on considère la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{a-\cos x}{\sin x}$ définie sur $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

1°) Justifier que pour tout réel $x \in E$ on a : $f_a'(x) = \dfrac{1 - a\cos x}{\sin^2 x}$ (justification de la dérivabilité non demandée).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Dans cette question, on choisit $a = 3$ et on s'intéresse aux variations de $f_3$ sur l'intervalle $]0\,;\pi[$.

On note $\alpha$ le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

a) Compléter le tableau ci-dessous sans justifier les lignes de signes.

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\pi$ |
|---|---|
| | |
| | |
| Signe de $f_3'(x)$ | |
| Variations de $f_3$ | |

b) Calculer la valeur exacte de $f_3(\alpha)$ et compléter le tableau de variations ci-dessus avec cette valeur.

$f_3(\alpha) =$ ……………… (un seul résultat sous la forme la plus simple possible)

3°) On suppose que $a$ est un réel quelconque vérifiant $|a| < 1$.

Donner le sens de variation de $f_a$ sur chacun des intervalles qui constituent $E$. On rédigera les explications. On ne demande pas de tableau de variations.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) On suppose que $a = 1$. Justifier que pour tout $x \in E$, $f_1(x) = \tan\dfrac{x}{2}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Donner sans justifier une formule analogue pour $f_{-1}(x)$.

$f_{-1}(x) =$ ……………………

5°) Justifier que $f_a''(x)$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P_a(\cos x)}{\sin^3 x}$ où $P_a$ est une fonction polynôme de degré au plus 2 qui dépend du paramètre $a$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

**II. (2 points)**

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 3\cos^5\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

On donnera le résultat final sous une forme simplifiée.

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

---

**III. (4 points)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos(5x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (1) et $1-2\sin x=0$ (2).

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

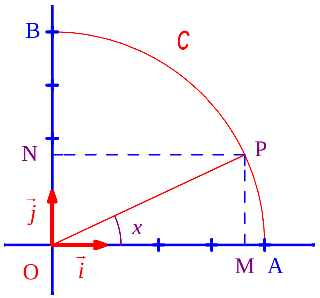
……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

**IV. (4 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Le point P appartient au quart de cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 4 et d'extrémités A(4 ; 0) et B(0 ; 4).
On construit le rectangle ONPM où M appartient à [OA] et N à [OB].




On note $x$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOP}$.

1°) À quel intervalle I appartient $x$ ? Répondre sans justifier.

……………………………………

2°) Exprimer le périmètre du rectangle ONPM en fonction de $x$. Donner le résultat sans justifier.

……………………………………

3°) Vérifier que pour tout réel $x$, on a : $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

En déduire pour quelle valeur de $x$ le périmètre du rectangle ONPM est maximal.

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

……………………………………………………………………………………………………………....

# Corrigé du contrôle du 13-1-2015

**I.**

Pour tout réel $a$, on considère la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{a-\cos x}{\sin x}$ définie sur $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

1°) Justifier que pour tout réel $x \in E$ on a : $f_a{}'(x) = \dfrac{1-a\cos x}{\sin^2 x}$ (justification de la dérivabilité non demandée).

$$\forall x \in E \quad f_a{}'(x) = \frac{\sin x \times \sin x - \cos x \times (a - \cos x)}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin^2 x - a\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{1-a\cos x}{\sin^2 x}$$

2°) Dans cette question, on choisit $a = 3$ et on s'intéresse aux variations de $f_3$ sur l'intervalle $]0\,;\pi[$.

On note $\alpha$ le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

a) Compléter le tableau ci-dessous sans justifier les lignes de signes.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $1-3\cos x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $\sin^2 x$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ |
| Signe de $f_3{}'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ |
| Variations de $f_3$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $2\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $\Vert$ |

On remplit les lignes de signe en utilisant le cercle trigonométrique (et on vérifie éventuellement avec des valeurs tests).

Attention aux doubles barres essentielles.

b) Calculer la valeur exacte de $f_3(\alpha)$ et compléter le tableau de variations ci-dessus avec cette valeur.

$f_3(\alpha) = 2\sqrt{2}$ (un seul résultat sous la forme la plus simple possible)

$$f_3(\alpha) = \frac{3-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

On a : $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ donc $\sin^2\alpha = \dfrac{8}{9}$.

Or $\alpha \in [0\,;\pi]$ donc $\sin\alpha \geqslant 0$ d'où $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Donc $f_3(\alpha) = \dfrac{3-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{8}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

On complète le tableau de la question précédente avec cette valeur.

3°) On suppose que $a$ est un réel quelconque vérifiant $|a| < 1$.
Donner le sens de variation de $f_a$ sur chacun des intervalles qui constituent $E$. On rédigera les explications. On ne demande pas de tableau de variation.

$$\forall x \in E \quad f_a{}'(x) = \frac{1-a\cos x}{\sin^2 x}$$

On utilise la valeur absolue à cause d'un problème technique de multiplication membre à membre d'inégalités : on ne peut le faire que pour des inéquations de même sens et ne comportant que des nombres positifs ou nuls).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\cos x| \leqslant 1$ (propriété du cours)

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad |a| \times |\cos x| \leqslant 1$ (multiplication membre de deux inégalités de même sens avec des nombres positifs)

Par suite, $\forall x \in \mathbb{R} \quad |a\cos x| \leqslant 1$ et donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad a\cos x \leqslant 1$.

(En effet $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R} \quad \mathrm{X} \leqslant |\mathrm{X}|$).

D'où $\forall x \in E \quad f_a{}'(x) \geqslant 0$.

On en déduit que $f_a$ est croissante sur chacun des intervalles qui constituent $E$.

4°) On suppose que $a = 1$. Justifier que pour tout $x \in E$, $f_1(x) = \tan\dfrac{x}{2}$.

$$f_1(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$
$$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2} \times \cos\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$
$$= \tan\frac{x}{2}$$

Donner sans justifier une formule analogue pour $f_{-1}(x)$.

$$
\begin{aligned}
f_{-1}(x) &= \frac{-1-\cos x}{\sin x} \\
&= -\frac{1+\cos x}{\sin x} \\
&= -\frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2}} \\
&= -\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \\
&= -\cot\frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

La notation « cot » désigne la cotangente définie par $\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$.

On peut aussi écrire $f_{-1}(x) = -\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}$ si l'on ne connaît pas la cotangente.

5°) Justifier que $f_a''(x)$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P_a(\cos x)}{\sin^3 x}$ où $P_a$ est une fonction polynôme de degré au plus 2 qui dépend du paramètre $a$.

$$\forall x \in E \quad f_a'(x) = \left(1-a\cos^2 x\right)\times\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$
\begin{aligned}
\forall x \in E \quad f_a''(x) &= a\times\sin x\times\frac{1}{\sin^2 x}+\left(1-a\cos x\right)\times-\frac{2\cos x}{\sin^3 x} \\
&= \frac{a\sin^2 x-2\cos x\left(1-a\cos x\right)}{\sin^3 x} \\
&= \frac{a\left(1-\cos^2 x\right)-2\cos+2a\cos^2 x}{\sin^3 x} \\
&= \frac{a\cos^2 x-2\cos x+a}{\sin^3 x}
\end{aligned}
$$

$$\forall x \in E \quad f_a''(x) = \frac{P_a(\cos x)}{\sin^3 x} \text{ avec } P_a(t) = at^2+2t+a$$

$P_a(t) = at^2+2t+a$ donc $P_a$ est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 (de degré 2 si $a \neq 0$ et de degré 1 si $a = 0$).

## II.

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 3\cos^5\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

On donnera le résultat final sous une forme simplifiée.

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= 3\times 5\times\left[-3\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\times\cos^4\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -45\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos^4\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

On ne cherche pas à aller plus loin.
On considère que l'on a obtenu une forme simplifiée de la dérivée.

---

## III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos(5x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (1) et $1-2\sin x = 0$ (2).

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(5x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (1).

Inutile de mettre $\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \cos(5x) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 5x = -\dfrac{\pi}{4}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{20}+\dfrac{2k\pi}{5} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{2k'\pi}{5} \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit $S_1$ l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1 = \left\{\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{20}+\frac{2k'\pi}{5},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $1-2\sin x=0$ (2).

$(2) \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\frac{5\pi}{6}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

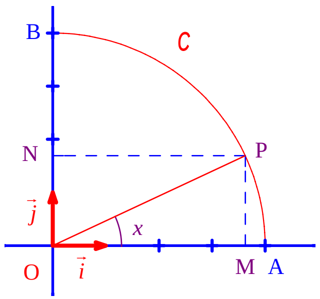
Soit $S_2$ l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$$

---

**IV.**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Le point P appartient au quart de cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 4 et d'extrémités A(4 ; 0) et B(0 ; 4).
On construit le rectangle ONPM où M appartient à [OA] et N à [OB].




On note $x$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{AOP}}$.

1°) À quel intervalle I appartient $x$ ? Répondre sans justifier.

$$\mathrm{I}=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{écriture interdite : } x\in\mathrm{I}=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$$

2°) Exprimer le périmètre du rectangle ONPM en fonction de $x$. Donner le résultat sans justifier.

$$\mathcal{P}_{\text{ONPM}}=8\cos x+8\sin x$$

3°) Vérifier que pour tout réel $x$, on a : $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
En déduire pour quelle valeur de $x$ le périmètre du rectangle ONPM est maximal.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$$

$$=\cos x+\sin x$$

Or $\forall x\in\mathrm{I}\quad \mathcal{P}_{\text{ONPM}}=8(\cos x+\sin x)$.

On a donc $\forall x\in\mathrm{I}\quad \mathcal{P}_{\text{ONPM}}=8\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Or $\forall x\in\mathrm{I}\quad -\frac{\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$

Donc $\forall x\in\mathrm{I}\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$ (le 1 provient du cercle trigonométrique ; on « lit » le 1 sur le cercle trigonométrique)

Par suite, $\forall x\in\mathrm{I}\quad \mathcal{P}_{\text{ONPM}}\leqslant 8\sqrt{2}$.

Le périmètre est maximal lorsque $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Or le seul nombre de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ dont le cosinus est égal à 1 est 0.

Donc le périmètre de ONMP est maximal pour $x=\frac{\pi}{4}$.