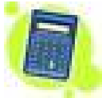
TS1

Contrôle du mardi 6-1-2015 (50 minutes)



Prénom et nom : …………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (3 points)

Démontrer en 3-4 lignes que, pour tout nombre complexe z, on a : $|z+\mathrm{i}|=|\mathrm{i}\bar{z}+1|$.

…….

…….

…….

II. (3 points : 2 points + 1 point)

Pour tout nombre complexe z, on pose $\mathrm{A}=|z|+|\bar{z}-1|$.

1°) Calculer A pour $z=1+2\mathrm{i}$ et pour $z=\mathrm{i}\sqrt{3}$. Donner les résultats sans justifier

…….

…….

…….

2°) Démontrer que, pour tout nombre complexe z, on a : $\mathrm{A}\geqslant 1$.

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

Dans les exercices **III** et **IV**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Aucun graphique n'est demandé.

III. (7 points : 3 points + 2 points + 2 points)

On note A le point de P d'affixe – 2.

On considère les ensembles E_1, E_2, E_3 ainsi définis :

$$E_1=\left\{\mathrm{M}(z)\in P \,/\, \left|1+\frac{z}{2}\right|=1\right\} \quad ; \quad E_2=\left\{\mathrm{M}(z)\in P \,/\, |(1+\mathrm{i})z|=4\right\} \quad ; \quad E_3=\left\{\mathrm{M}(z)\in P \,/\, |2+z|=|z|\right\}.$$

Déterminer les ensembles E_1, E_2, E_3.

On rédigera complètement la recherche de l'un de ces ensembles (aux choix) et l'on donnera uniquement la réponse sans détailler pour les deux autres.

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

……."

IV. (3 points)

À tout point M du plan *P*, d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z}{1+|z|}$.

1°) Justifier que $|z'| = \dfrac{|z|}{1+|z|}$.

……

……

……

2°) Démontrer que pour tout point M du plan *P*, alors M' appartient au disque ouvert de centre O et de rayon 1.

……

……

……

……

……

……

……

3°) Démontrer que si M appartient à un cercle Γ de centre O et de rayon *R* (avec $R > 0$) alors M' appartient à un cercle Γ' dont on donnera centre et le rayon.

……

……

……

……

……

V. (4 points)

Soit ABCD un tétraèdre tel que le triangle ABD soit isocèle en A et que le triangle BCD soit isocèle en C.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales. Aucune figure n'est demandée.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 6-1-2015

I.

Démontrer en 3-4 lignes que, pour tout nombre complexe z, on a : $|z+\mathrm{i}|=|\mathrm{i}\overline{z}+1|$.

On ne repasse pas à la forme algébrique (calculs compliqués).

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C}\quad |\mathrm{i}\overline{z}+1| &= |\mathrm{i}(\overline{z}-\mathrm{i})|\\ &= |\mathrm{i}|\times|\overline{z}-\mathrm{i}|\\ &= 1\times|\overline{z+\mathrm{i}}|\\ &= |z+\mathrm{i}|\end{aligned}$$

On commence par factoriser par i à l'intérieur du module (factorisation forcée).

On utilise ensuite la propriété du module d'un produit puis du module d'un conjugué.

Autres méthodes :

- Repasser en forme algébrique (maladroit comme nous l'avons dit avant).

- Utiliser une propriété du module (un peu maladroit)

$$|z+\mathrm{i}|=\sqrt{(z+\mathrm{i})\times\left(\overline{z+\mathrm{i}}\right)}=\sqrt{(z+\mathrm{i})\times(\overline{z}-\mathrm{i})}=\sqrt{z\overline{z}-\mathrm{i}z+\mathrm{i}\overline{z}+1}$$

$$|\mathrm{i}\overline{z}+1|=\sqrt{.....}$$

Deux horreurs que j'ai vues dans plusieurs copies :

- $|z+\mathrm{i}|=\sqrt{z^2+1}$ (z est un complexe et non un réel !)

- $|z+\mathrm{i}|=|z|+|\mathrm{i}|=|z|+1$

II.

Pour tout nombre complexe z, on pose $\mathrm{A}=|z|+|\overline{z}-1|$.

1°) Calculer A pour $z=1+2\mathrm{i}$ et pour $z=\mathrm{i}\sqrt{3}$. Donner les résultats sans justifier

Pour $z=1+2\mathrm{i}$, $\mathrm{A}=2+\sqrt{5}$.

Pour $z=\mathrm{i}\sqrt{3}$, $\mathrm{A}=2+\sqrt{3}$.

2°) Démontrer que, pour tout nombre complexe z, on a : $\mathrm{A}\geqslant 1$.

On commence par transformer l'expression A.

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{A} &= |z|+|\overline{z}-1|\\ &= |z|+|\overline{z-1}|\\ &= |z|+|z-1|\\ &= |z|+|1-z|\end{aligned}$$

Le passage entre l'avant-dernière ligne et la dernière ligne du calcul se justifie en disant que l'opposé de $z-1$ est $1-z$: $z-1$ et $1-z$ ont le même module.

D'après l'inégalité triangulaire sur les nombres complexes, $\forall z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{A}\geqslant|z+(1-z)|$ donc $\forall z\in\mathbb{C}\quad \mathrm{A}\geqslant 1$.

Dans les exercices **III** et **IV**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.

Aucun graphique n'est demandé.

III.

On note A le point de P d'affixe – 2.
On considère les ensembles E_1, E_2, E_3 ainsi définis :

$$E_1=\left\{\mathrm{M}(z)\in P\,/\left|1+\frac{z}{2}\right|=1\right\}\quad;\quad E_2=\left\{\mathrm{M}(z)\in P\,/\,|(1+\mathrm{i})z|=4\right\}\quad;\quad E_3=\left\{\mathrm{M}(z)\in P\,/\,|2+z|=|z|\right\}.$$

Déterminer les ensembles E_1, E_2, E_3.
On rédigera complètement la recherche de l'un de ces ensembles (aux choix) et l'on donnera uniquement la réponse sans détailler pour les deux autres.

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in E_1 &\Leftrightarrow \left|1+\frac{z}{2}\right|=1\\ &\Leftrightarrow 2\times\left|1+\frac{z}{2}\right|=2\\ &\Leftrightarrow |2|\times\left|1+\frac{z}{2}\right|=2\\ &\Leftrightarrow \left|2\times\left(1+\frac{z}{2}\right)\right|=2\\ &\Leftrightarrow |2+z|=2\\ &\Leftrightarrow |z-z_{\mathrm{A}}|=2\\ &\Leftrightarrow \mathrm{AM}=2\end{aligned}$$

E_1 est le cercle de centre A et de rayon 2.

E_2 est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

E_3 est la médiatrice de [OA].

Remarque : *On ne parle pas du point M dans la conclusion.*

IV.

À tout point M du plan *P*, d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{\text{i}z}{1+|z|}$.

1°) Justifier que $|z'|=\dfrac{|z|}{1+|z|}$.

$$\begin{aligned}|z'|&=\left|\frac{\text{i}z}{1+|z|}\right|\\&=\frac{|\text{i}z|}{\big|1+|z|\big|}\\&=\frac{|\text{i}|\times|z|}{1+|z|}\\&=\frac{|z|}{1+|z|}\end{aligned}$$

Justification du passage entre les lignes 2 et 3 :

$\big|1+|z|\big|=1+|z|$ car $1+|z|$ est un réel positif et le module d'un réel est égal à sa valeur absolue.

En version plus détaillée, on peut aussi dire que $|z|\in\mathbb{R}_+$ donc $1+|z|\in\mathbb{R}_+$.

Par suite,

$\big|1+|z|\big|=$ valeur absolue $\big(1+|z|\big)$

$=1+|z|$ (car la valeur absolue d'un réel positif est égal à ce réel)

2°) Démontrer que pour tout point M du plan *P*, alors M' appartient au disque ouvert de centre O et de rayon 1.

Soit M un point quelconque de *P* d'affixe $z\in\mathbb{C}$.

$\forall z\in\mathbb{C}\quad |z|<1+|z|$

Or $1+|z|>0$.

Par suite, $\dfrac{|z|}{1+|z|}<1$ soit $|z'|<1$.

Cette inégalité se traduit par $\text{OM}'<1$.

Donc en déduit que M' appartient au disque ouvert de centre O et de rayon 1.

3°) Démontrer que si M appartient à un cercle Γ de centre O et de rayon *R* (avec $R>0$) alors M' appartient à un cercle Γ' dont on donnera le centre et le rayon.

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon $R>0$.

Soit M un point quelconque de *P* d'affixe $z\in\mathbb{C}$.

Si $\text{M}\in\Gamma$, alors $\text{OM}=R$ donc $|z|=R$.

D'après la question 2°), on a alors $|z'|=\dfrac{R}{1+R}$.

On a donc : $\text{OM}'=\dfrac{R}{1+R}$.

Cette dernière égalité permet d'affirmer que M' appartient au cercle Γ' de centre O et de rayon $R'=\dfrac{R}{1+R}$.

V.

Soit ABCD un tétraèdre tel que le triangle ABD soit isocèle en A et que le triangle BCD soit isocèle en C.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales. Aucune figure n'est demandée.

1ère méthode :

Soit I le milieu de [BD].

(IA) ⊥ (BD) car ABD est isocèle en A.

(IC) ⊥ (BD) car BCD est isocèle en C.

Or si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

Donc (BD) ⊥ (ACI).

De plus, (AC) ⊂ (ACI).
Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Donc (BD) ⊥ (AC).

2^{e} méthode :

Soit *P* le plan médiateur de [BD].

ABD est isocèle en A donc $\text{AB}=\text{AD}$. Par suite, $\text{A}\in P$.

BCD est isocèle en C donc $CB = CD$. Par suite, $C \in P$.

Or par définition du plan médiateur, $P \perp (BD)$.

De plus, $(AC) \subset P$.

Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
Donc $(AC) \perp (BD)$.

• Il faut veiller à utiliser le bon vocabulaire et les bonnes notations (exemple : les droites D et D' se coupent et non « se croisent », la droite *D* est incluse et non « fait partie » du plan du plan *P*, ou « appartient » au plan *P*).

• Les symboles sont bien sûr autorisés.

Consignes orales

Pour un certain nombre de questions, il faut chercher d'abord au brouillon.

II.

La question 2°) est la plus difficile du contrôle

V.

L'utilisation de symboles (notamment le symbole $\perp$) est autorisée.