1ère S

Le radian

Le degré est la plus ancienne unité de mesure d'angle utilisée : ce sont les Mésopotamiens qui l'ont créée dans l'antiquité. Ils ont décrété qu'un angle plein mesurait 360 °. La raison est inconnue. Peut-être est-ce dû au système de numération en base 60 qu'ils utilisaient et qu'ils nous ont transmis dans les unités de mesures du temps.

Le radian est une unité de mesure d'angle beaucoup plus récente (Angleterre, 1870). C'est une unité dérivée du système SI et par conséquent, c'est l'unité de mesure d'angle du système SI.

Le mot radian vient du mot latin *radius*, qui signifie *rayon*.

Le samedi 7 septembre 2019

Calculatrice TI-83 Premium CE

Les deux unités degré et radian sont présentes sur la calculatrice.

Comme sur la calculatrice fx-92 collège, il est possible d'effectuer des conversions d'une unité dans l'autre. On utilise pour cela la commande angle de la calculatrice (présente au-dessus de la touche avec deux flèches).

Il est à noter également que, dans le menu angle, on a DMS, qui permet d'obtenir une écriture en degré, minute et seconde d'angle.

Le jeudi 2 décembre 2021

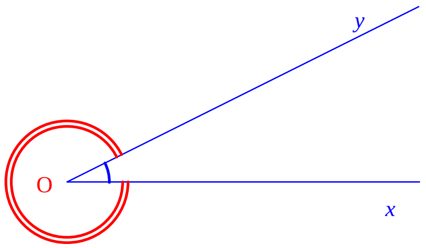
Romain Joly El Ahl

« La longueur d'un arc c'est juste la partie voûtée »

I. Quelques rappels sur les angles géométriques

1°) Vocabulaire

Étant données deux demi-droites [Ox) et [Oy) de même origine O, elles définissent deux secteurs angulaires :
Un secteur angulaire saillant et un secteur angulaire rentrant (lorsque les deux demi-droites ont le même support mais des directions opposées, il n'y a pas de différence entre les deux).
À chacun de ces secteurs est associé un angle géométrique.



$\widehat{xOy}$: **angle saillant**

$\overset{\smile}{xOy}$: **angle rentrant**

O : **sommet**

[Ox) et [Oy) : **côtés**

On sait mesurer des angles en **degrés**.

On connaît le vocabulaire des angles géométriques saillants (angles adjacents c'est-à-dire angles ayant un côté et donc un sommet commun et situés de part et d'autre de ce côté commun, angles opposés par le sommet, angles supplémentaires, angles complémentaires, angles adjacents supplémentaires, angles adjacents complémentaires) et les propriétés des mesures en degrés (angles opposés par le sommet, somme des mesures des angles d'un triangle, angles alterne-internes, théorème de l'angle inscrit).

(N.B. : La notion d'angle aigu, obtus ou droit n'est valable que pour les angles géométriques saillants.)

2°) Dans ce chapitre

On va apprendre une nouvelle unité de mesure d'angle : **le radian**.

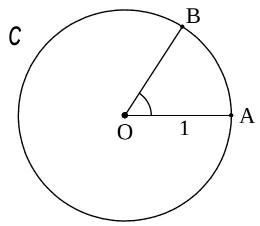
II. Le radian

1°) Définition

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 1 (une unité de longueur ayant été choisie).
A et B sont deux points quelconques de $\mathcal{C}$.
La **mesure en radian** de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Remarques sur les notations :

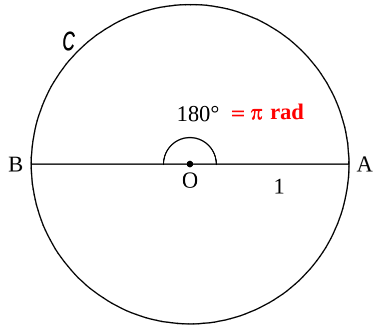
L'angle $\widehat{AOB}$ peut aussi se noter $\widehat{BOA}$.
L'arc $\overset{\frown}{AB}$ peut aussi se noter $\overset{\frown}{BA}$.



2°) Correspondance

Le périmètre de $\mathcal{C}$ est égal à $\mathcal{P} = 2\times\pi\times1 = 2\pi$.

A et B sont deux points de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés.



La longueur de chacun des deux arcs d'extrémités A et B (demi-cercles) est donc égale à π.

$$\boxed{180° = \pi \text{ rad}}$$

En pratique, on oublie la définition pour ne retenir que la correspondance : $180° = \pi$ rad .

III. Conversion

1°) Principe

La mesure d'un angle en radian est proportionnelle à celle en degré.

2°) Angles remarquables (tableau à apprendre par cœur)

Mesure en degrés	0	30	45	60	90	180
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Mesure en degrés	120	135	150
Mesure en radians	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

On notera que $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ … sont des valeurs exactes.

Il n'existe pas de rapporteur en radians.

$\frac{\pi}{4}$ se lit « pi sur 4 » et non « pi quart ».

On retiendra en particulier que :
la mesure en radian d'un angle droit est $\frac{\pi}{2}$;
la mesure en radian d'un angle plein est 2π.

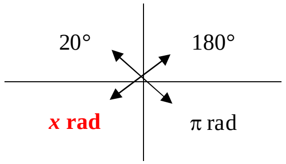
30° et 60° sont des mesures en degrés d'angles complémentaires.
30° et 150° sont des mesures en degrés d'angles supplémentaires.
45° et 135° sont des mesures en degrés d'angles supplémentaires.
60° et 120° sont des mesures en degrés d'angles supplémentaires.

3°) Exercices

On souhaite convertir des mesures d'angles en degrés en radians et le contraire c'est-à-dire des mesures en radians en degrés.
On utilise un tableau de proportionnalité. Sur la première ligne, on porte les mesures en degrés. Sur la deuxième ligne, on porte les mesures en radians.
On utilise la correspondance fondamentale : $180° = \pi$ rad .

On utilise les techniques du cours de 5^e^ sur les tableaux de proportionnalité : quotients, produits en croix, quatrième proportionnelle. Les différentes techniques sont évidemment reliées entre elles.

• Convertir 20° en radians.



→ On peut écrire l'égalité suivante de quotients : $\frac{x}{20} = \frac{\pi}{180}$.

On obtient $x = \frac{20\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$.

→ On peut écrire directement l'égalité de produits en croix.

$x \times 180 = \pi \times 20$

$18x = 2\pi$

$9x = \pi$

$x = \frac{\pi}{9}$

→ On peut écrire directement x en fonction des autres nombres du tableau de proportionnalité (quatrième proportionnelle).

$x = \frac{2\cancel{0} \times \pi}{18\cancel{0}}$

$x = \frac{\pi}{9}$

On obtient x en fonction de π. C'est la valeur exacte.
On peut utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée.

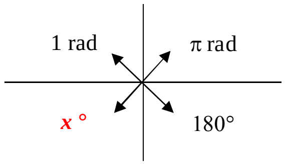
Les mesures en radians comporte des π. On laisse π dans le résultat.
On ne remplace jamais π par « sa valeur » (jamais 3,14).

On peut écrire $20° = \frac{\pi}{9}$ rad.

On peut aussi utiliser les propriétés de la proportionnalité : pour passer de 180 à 20, on divise par 9. Donc on obtient la mesure correspondante en radians en divisant π par 9.

On évite d'écrire $\frac{1}{9}\pi$. On écrit plutôt $\frac{\pi}{9}$.

• Convertir 1 radian en degrés.



On a $\frac{x}{1} = \frac{180}{\pi}$ (égalité des quotients).

$x = \frac{180}{\pi}$ (valeur exacte)

$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$

Avec la calculatrice, on obtient $x = 57,295...$.

Ainsi : $1 \text{ rad} = 57,295...°$.

Remarque :

Nous admettrons sans démonstration qu'il n'est pas possible de construire de manière exacte, à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, un angle de 1 radian.

4°) Propriété

Soit x la mesure en degré d'un angle et y sa mesure en radian.

On a : $\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi}$.

IV. Longueur d'un arc de cercle

Rappel de définition (6^e) [arc de cercle] :

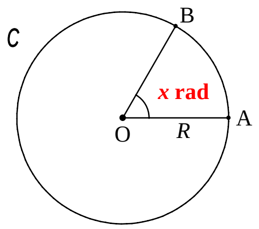
Deux points A et B d'un cercle définissent deux arcs de cercle.
Lorsque A et B ne sont pas diamétralement opposés, on parle :
de « petit arc » noté $\overset{\frown}{AB}$
et
de « grand arc » noté $\overset{\smile}{AB}$.

Figure

1°) Démonstration

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R.
A et B sont deux points quelconques de $\mathcal{C}$.

On considère un arc de cercle d'extrémités A et B (sur la figure, nous avons pris le petit arc $\overset{\frown}{AB}$).



① On se place d'abord dans le cas du petit arc $\overset{\frown}{AB}$.

On note x la mesure en $\boxed{\text{radians}}$ de l'angle au centre (saillant ou rentrant) qui intercepte cet arc.

On s'intéresse à la longueur L de cet arc.

Comme cela a été fait lors de l'étude du périmètre d'un cercle en 6^e, on peut imaginer un fil que l'on fixe que l'on fixe en A et B.
On peut aussi imaginer un promeneur qui se déplace de A à B ou de B à A sur le petit arc de cercle.

Il est intéressant de faire le geste de A à B ou de B à A correspondant au trajet sur l'arc de cercle.

Un appareil peut aider à se représenter ce qu'est la longueur d'un arc de cercle. Il s'agit d'une « roue de distance » aussi appelée « odomètre-podomètre » que l'on utilise en sport.

La longueur L correspond à la longueur du fil ou la longueur du trajet.

On va exprimer L en fonction de R et x.

On admet que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle au rayon du cercle.

$\times R$

Rayon du cercle	1	R
Longueur de l'arc	x	$\boldsymbol{R \times x}$

$\times R$

Par définition du radian

$\boxed{L = R \times x}$

② On se place ensuite dans le cas du grand arc du grand arc $\overset{\smile}{AB}$.

On reprend les mêmes notations L et x.

Le calcul est le même.

On obtient la même formule.

N.B. : Cette formule est valable aussi bien pour un petit arc que pour un grand arc.

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est exprimée dans la même unité que le rayon *R* du cercle (par exemple, si le rayon est exprimé en cm, alors la longueur de l'arc sera exprimée en cm).

2°) Propriété

La longueur d'un arc de cercle est égale au produit du rayon du cercle par la mesure en $\boxed{\text{radians}}$ de l'angle au centre associé.

3°) Rappel

Étant deux points non diamétralement opposés sur un cercle, ces deux points déterminent deux arcs de cercle.
L'un est un petit arc noté $\overset{\frown}{AB}$; l'autre est un grand arc noté $\overset{\smile}{AB}$.

4°) Exemple de calcul avec les unités

Calculer la longueur L d'un arc de cercle de rayon 8 cm intercepté par un angle au centre $\frac{\pi}{4}$ rad.

$$\begin{aligned} L &= (8\text{ cm}) \times \frac{\pi}{4} \\ &= 2\pi\text{ cm} \end{aligned}$$

On incorpore les unités dans les calculs.

5°) Utilisation d'un logiciel de géométrie

Sur *Geogebra*, il est possible de faire apparaître la longueur d'un arc de cercle.

V. Remarques diverses

1°) Point méthode

Quand on travaille en radians, il est inutile de revenir en degrés.

Exemples :

• Si on sait que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$, on peut tout de suite conclure que le triangle ABC est rectangle en B.

Il est inutile de préciser auparavant que $\frac{\pi}{2} = 90°$.

On observera que lorsque l'on écrit $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$, cela signifie $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}\ (\text{rad})$.
L'unité radian est sous-entendue ; cela sera le plus souvent le cas, contrairement au degré qui, lui, sera toujours écrit.

2°) Calculatrice

Le radian est présent sur la calculatrice (mode radian).
Lorsque l'on veut obtenir une mesure d'angle en radians à partir d'un cosinus, d'un sinus ou d'une tangente, il ne faut pas oublier de mettre la calculatrice en mode radians.

3°) Utilisation

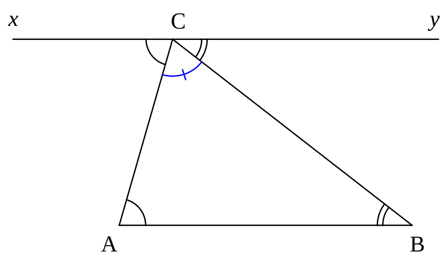
• Cette unité sera très utile (et utilisée) dans un chapitre consacrée à un nouveau type d'angles : les angles orientés de vecteurs.

• Le radian est l'unité de mesure d'angle du système international. Cela a une grande importance en physique.

4°) Rappel de propriétés transcrites en radians

Dans un triangle quelconque, la somme des mesures en radians des angles vaut π.

La démonstration repose sur la figure suivante où la droite (xy) est la parallèle à (AB).



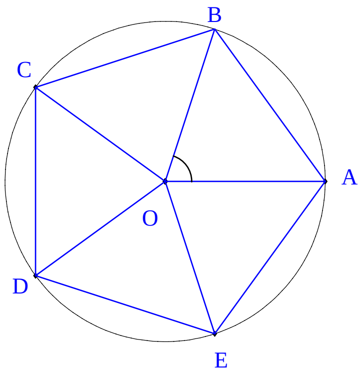
Dans un triangle équilatéral, tous les angles ont pour mesure $\frac{\pi}{3}$ rad.

Dans un triangle rectangle isocèle, les angles à la base ont pour mesure $\frac{\pi}{4}$ rad.

Dans un polygone régulier convexe à n côtés (où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3), les angles au centre ont tous la même mesure en radians, à savoir $\frac{2\pi}{n}$.

Exemple :

Dans un pentagone régulier convexe (non croisé), tous les angles au centre ont pour mesure $\frac{2\pi}{5}$.



Propriété :

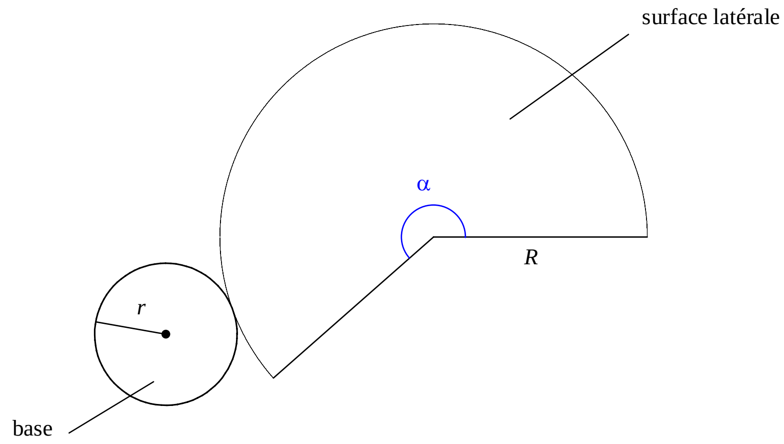
Un polygone régulier convexe à n côtés (où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3) et de centre O est globalement invariant par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ dans le sens direct ou indirect.

VI. Application : patron d'un cône de révolution

On considère un cône de révolution dont la base est un disque de rayon r et la surface latérale mise à plat est un secteur circulaire de rayon R.

On notera que R est la longueur des génératrices du cône.

Comme on le voit sur la figure ci-dessous, la confection pratique d'un patron de ce cône nécessite de connaître la mesure α en radian de l'angle qui définit le secteur circulaire.
Nou allons voir comment calculer α en fonction de r et R.



En exprimant que la longueur de l'arc est égale au périmètre du disque de base, on obtient l'égalité $R\times\alpha = 2\pi\times r$.

On en déduit que $\boxed{\alpha = \frac{2\pi r}{R}}$.

Résumé du chapitre

● Correspondance entre degré et radian

$$180° = \pi \text{ rad}$$

● Valeurs remarquables

Mesure en degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

● Longueur d'un arc de cercle

$\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = R \times x$ avec R : rayon du cercle et x : mesure en $\boxed{\text{radians}}$ de l'angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$

La formule est également valable pour un grand arc.

Tableaux vierges pour apprendre le cours :

Mesure en degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Mesure en radians									

Mesure en degrés									
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

La mesure en radian d'un angle plat est égale à ………… .

La mesure en radian d'un angle droit est égale à ………… .

La mesure en radian d'un angle plein est égale à ………… .

Lire l'article de Direct Matin sur le mille marin août ou septembre 2017

Ajouter les différents types d'angles

Il y a une autre unité de mesure d'angles : le grade tel qu'un angle plat mesure 200 grades.
La calculatrice travaille en deux modes seulement : le mode degré et le mode radian (pas le mode grade).

Soit x la mesure en degré d'un angle et y sa mesure en radian.

On a : $\frac{x}{180}=\frac{y}{\pi}$.

Le 5-9-2014

Compléments :

1. Historique

Le degré provient de la division d'un cercle en 360 parties égales (voir document de Marie-Pierre Drain).

2. Le grade

3. $\frac{\alpha}{180}=\frac{\beta}{\pi}$

4. Aire d'un secteur circulaire

Faire une figure.

5. Angle nul, angle plat, angle droit, angle plein

Le 7-9-2014

Rappeler aux élèves la démonstration de la somme des mesures des angles d'un triangle quelconque.
On peut procéder par « preuve sans paroles ».

Le 7-9-2014

Demander aux élèves de faire une fiche (sous forme classique d'une carte mentale).

Le 8-9-2014

Le degré provient de la division d'un cercle en 360 arcs de même longueur.

Il n'en est pas de même du radian.

Le 8-9-2014

Voir document Danièle Touillier sur les unités de mesure d'angles.

L'un des buts du cours est d'apprendre à penser en radians.

23-9-2014

Preuve sans parole : somme des angles d'un triangle

Issu du corrigé du contrôle du 14-11-2014

On rappelle les valeurs remarquables suivantes : $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.