1$^{\text{ère}}$ S

Les angles orientés (1)

Plan du chapitre

I. Introduction et rappels

1°) Dans le chapitre sur le radian, nous avons étudié une nouvelle unité de mesure d'angles : le radian.

Nous avons notamment donné l'égalité de correspondance fondamentale pour les mesures en degrés et en radians d'un angle plat.

$$\boxed{180° = \pi \text{ rad}}$$

Nous avons également donné le tableau de correspondance pour des valeurs remarquables de mesures d'angles.

Mesures en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Cette unité va être très utilisée dans ce chapitre consacré à un nouveau type d'angles : les angles orientés de vecteurs.

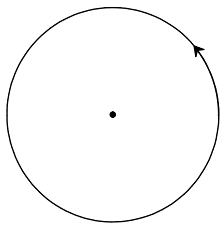
2°) Toujours dans le chapitre sur le radian, nous avons rappelé des points de vocabulaire sur les angles géométriques ; nous avons notamment rappelé ce qu'est un angle géométrique saillant ainsi qu'un angle géométrique rentrant.
Ces deux notions vont nous être utiles pour les angles orientés de vecteurs.

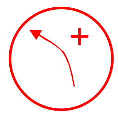
3°) Nous verrons dans les autres chapitres consacrés aux angles orientés de vecteurs que les angles orientés de vecteurs permettent de faire plus de « choses » que les angles géométriques (ont plus de propriétés notamment) et, de ce fait, qu'ils permettent de démontrer plus de choses d'où l'intérêt de les étudier.

II. Orientation du plan

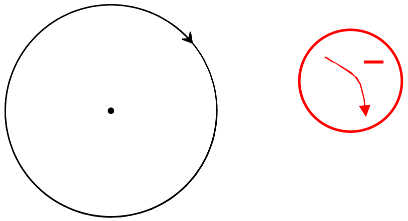
On dit que le plan est **orienté** lorsque l'on décide d'un sens positif de parcours sur tous les cercles du plan.

En général, on décide de tourner dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (à aiguilles) sur tous les cercles du plan.





Sens positif
trigonométrique
direct

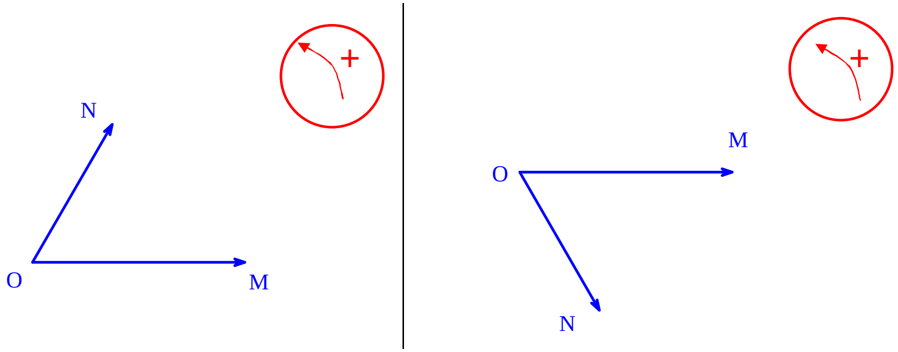


Sens négatif
anti-trigonométrique
indirect

Dans tout le reste du chapitre, le plan est orienté.

III. Exemples de mesures d'angles orientés de vecteurs

1°) Deux configurations d'étude



2°) Mesures d'angles orientés associés à l'angle géométrique aigu

Sur les deux figures, **la** mesure en radians de l'angle $\widehat{MON}$ (angle géométrique saillant) est $\frac{\pi}{3}$ rad.

Grâce à l'orientation du plan indiquée par la flèche, on peut considérer les **angles orientés de vecteurs** formés par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ (vecteurs qui ont la même origine) : ces angles seront notés $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ et $\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right)$.
Ces deux angles sont différents. Nous verrons cependant qu'ils ont un lien.

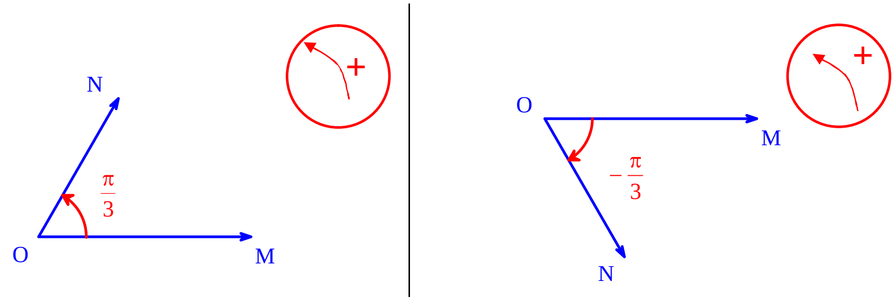
En tenant compte de l'orientation, on peut dire que :
$+\frac{\pi}{3}$ est **une** mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$.
Cette mesure est associée à celle de l'angle géométrique associé : $\widehat{MON}$.

On fait apparaître cette mesure d'angle orienté sur la figure comme une mesure d'angle géométrique sauf que l'on met une flèche pour montrer qu'il s'agit de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$, le premier vecteur étant $\overrightarrow{OM}$, et le second $\overrightarrow{ON}$.

On écrira : $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = +\frac{\pi}{3}$.

En tenant compte de l'orientation, on peut dire que :
$-\frac{\pi}{3}$ est **une** mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$.

On écrira : $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = -\frac{\pi}{3}$.



3°) Mesures d'angles orientés associés à l'angle géométrique rentrant

Sur les deux figures, **la** mesure en radians de l'angle $\overset{\smile}{\text{MON}}$ (angle géométrique rentrant) est $\dfrac{5\pi}{3}$ rad.

.

En tenant compte de l'orientation, on peut dire que : $-\dfrac{5\pi}{3}$ est **une** mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{ON}}\right)$.

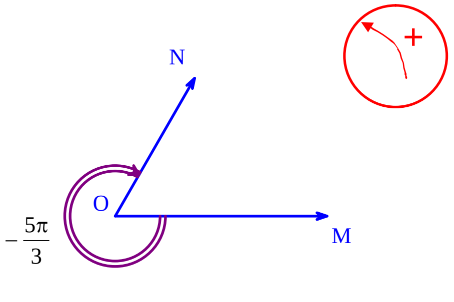
Cette mesure est associée à celle de l'angle géométrique associé : $\overset{\smile}{\text{MON}}$.

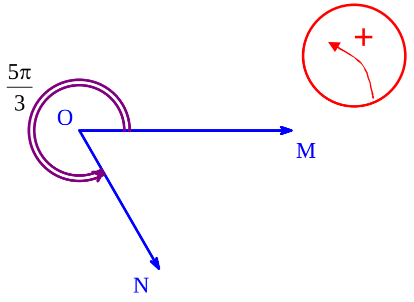
On fait apparaître cette mesure d'angle orienté su la figure comme une mesure d'angle géométrique sauf que l'on met une flèche pour montrer qu'il s'agit de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{ON}}\right)$, le premier vecteur étant $\overrightarrow{\text{OM}}$, et le second $\overrightarrow{\text{ON}}$.

On écrira : $\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{ON}}\right) = -\dfrac{5\pi}{3}$.

En tenant compte de l'orientation, on peut dire que : $+\dfrac{5\pi}{3}$ est **une** mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{ON}}\right)$.

On écrira : $\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{ON}}\right) = +\dfrac{5\pi}{3}$.





4°) Mesures de l'angle orienté opposé

$-\dfrac{\pi}{3}$ et $+\dfrac{5\pi}{3}$ sont des mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{ON}}, \overrightarrow{\text{OM}}\right)$.

$+\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{5\pi}{3}$ sont des mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{ON}}, \overrightarrow{\text{OM}}\right)$.

5°) Conclusion-bilan

L'orientation du plan permet de considérer un nouveau type d'angles : des angles orientés de vecteurs, dont l'intérêt sera vu plus tard.

Ces angles admettent des mesures en radians.

Pour un angle orienté de vecteurs, on peut toujours déterminer une mesure associée à l'angle géométrique saillant et une mesure associée à l'angle géométrique rentrant.

L'une de ces deux mesures est positive, l'autre est négative.

Sur une figure, on utilise un codage avec une flèche pour faire apparaître une mesure d'un angle orienté de vecteurs.

IV. Généralisation des exemples

1°) Principe des mesures

Étant donnés trois points O, M, N tels que O ≠ M et O ≠ N, on peut considérer les deux angles géométriques définis par les demi-droites [OM) et [ON) : l'angle saillant $\widehat{\text{MON}}$ et l'angle rentrant $\overset{\smile}{\text{MON}}$.

- La mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{MON}}$ appartient à l'intervalle $[0, \pi]$.

- La mesure en radians de l'angle $\overset{\smile}{\text{MON}}$ appartient à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.

Si l'on oriente le plan, on peut définir **l'angle orienté de vecteurs** $\left(\overrightarrow{\text{OM}}, \overrightarrow{\text{ON}}\right)$.

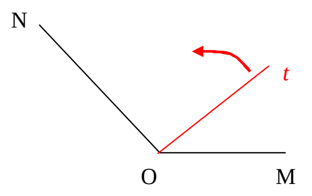
En tenant compte de cette orientation, on peut déterminer :

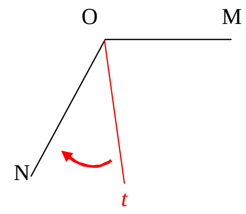
- une mesure en radians de cet angle orienté associée à l'angle saillant $\widehat{\text{MON}}$;

- une mesure en radians de cet angle orienté associée à l'angle rentrant $\overset{\smile}{\text{MON}}$.

L'une de ces deux mesures est positive, l'autre est négative.

Le signe de ces mesures s'obtient en imaginant une demi-droite [O*t*) d'origine O qui tourne autour du point O (fixe) et qui passe de la position [OM) à la position [ON).





On regarde le sens dans lequel on tourne (sens de rotation) pour déterminer le signe.

On pourra faire apparaître les mesures correspondantes sur une figure en utilisant le codage particulier aux angles orientés : même codage que pour un angle géométrique, sauf que l'on rajoute une flèche au bout.

Il est à noter que l'on ne trace pas toujours les vecteurs dont on fait apparaître l'une des mesures de l'angle orienté.

2°) Remarques

• Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **non nuls** du plan.
Étant donné un point O fixé du plan il existe un unique point M et un unique point N tels que
$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$.
Les points O, M, N permettent de se ramener à la situation précédente.
On peut ainsi considérer l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

• Dans un angle orienté de vecteurs, l'ordre des vecteurs est important.

• L'unité utilisée pour les angles orientés de vecteurs est plutôt le radian.

3°) Utilisation de figures

Pour déterminer une mesure de l'angle orienté formé par deux vecteurs non nuls définis par des points, il y a deux situations possibles.

- Les vecteurs ont la même origine : on procède comme dans les exemples précédents en s'appuyant sur les angles géométriques associés et en tenant compte de l'orientation du plan.

- Les vecteurs n'ont pas la même origine : on se ramène au cas précédent en « déplaçant » (parfois mentalement) les vecteurs de manière à les ramener à des représentants ayant la même origine. On définit éventuellement des points.

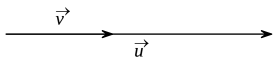
On ne fait pas toujours apparaître sur les figures les vecteurs dont on fait apparaître les mesures.

V. Configurations particulières

1°) Angles orientés formés par deux vecteurs colinéaires non nuls

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls.

1er cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de même sens**

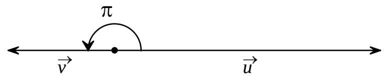


0 est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.
On écrit :

$\boxed{(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0}$ (angle nul)

2π est aussi une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

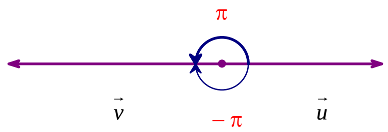
2e cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de sens contraire**



π est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.
On écrit :

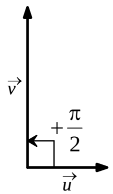
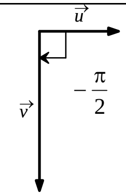
$\boxed{(\vec{u}\,;\vec{v}) = \pi}$ (angle plat)

$-\pi$ est aussi une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.



2°) Angles orientés formés par deux vecteurs orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux non nuls (c'est-à-dire que leurs directions sont orthogonales).

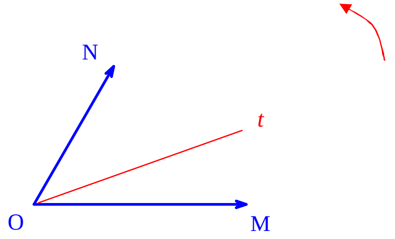
1er cas	2e cas
	
Angle droit direct	**Angle droit indirect**

On utilise le même codage que pour un angle droit géométrique sauf que l'on met une flèche au bout.

VI. Ensemble des mesures en radians d'un angle orienté

1°) Exemple

$\widehat{MON} = \frac{\pi}{3}$ rad



On imagine une demi-droite [O*t*) d'origine O qui tourne autour du point O (fixe) et qui passe de la position [OM) à la position [ON).

Cette fois la demi-droite se déplace constamment dans le même sens, en pouvant éventuellement passer plusieurs fois par la position [ON).

Chacun ces déplacements permet de définir une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$:

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi$; $\frac{\pi}{3}+4\pi$ …

$\frac{\pi}{3}-2\pi$; $\frac{\pi}{3}-4\pi$ …

On fait ainsi apparaître une infinité de mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)$.

Chacun des nombres écrits ci-dessus est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)$.

Les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)$ sont tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On écrira :

$$\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right) = \frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad ^{*}$$

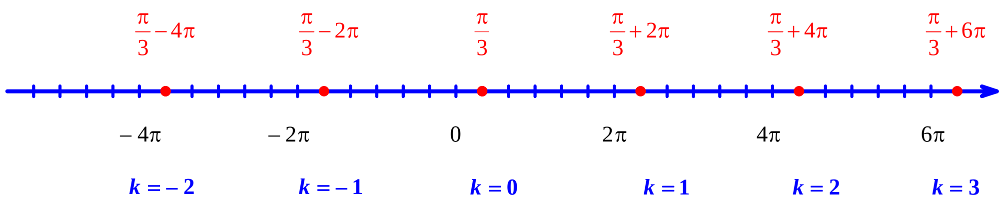
ou

$$\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right) = \frac{\pi}{3} \quad ^{**}$$

On ne met pas l'unité (le radian est sous-entendu).

[*] Cette égalité sera lue : « Les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)$ sont tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. »

[**] Cette égalité sera lue : « Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)$ est $\frac{\pi}{3}$. »



L'image mentale de la droite réelle avec toutes les mesures de l'angle orienté est extrêmement importante à retenir.

2°) Propriété

Si x est une mesure d'un angle orienté $\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls), alors les mesures en radians de cet angle orienté sont tous les nombres de la forme $x+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Un angle orienté admet donc une infinité de mesures en radians.

3°) Corollaire

x et y sont deux mesures en radians d'un même angle orienté de vecteurs si et seulement si $x-y$ est un multiple entier de 2π c'est-à-dire $x-y=2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple :

Les nombres $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{6}$ sont-ils les mesures en radians d'un même angle orienté ?

On fait la différence dans un sens ou dans l'autre.

$$\frac{\pi}{6}-\frac{13\pi}{6} = -\frac{12\pi}{6} = -2\pi = 2\times(-1)\times\pi$$

$-1 \in \mathbb{Z}$ donc les nombres $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{6}$ sont deux mesures en radians d'un même angle orienté.

4°) Rappels sur les ensembles de nombres

• **$\mathbb{N}$: <u>ensemble des entiers naturels</u> (c'est-à-dire positifs ou nuls)**

$\mathbb{N}=\{0\,;1\,;2\,;3...\}$

• **$\mathbb{Z}$: <u>ensemble des entiers relatifs</u> (positifs ou négatifs)**

$\mathbb{Z}=\{...-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,...\}$

• **$\mathbb{D}$: <u>ensemble des décimaux relatifs</u>**

Exemples : –1,54 ; 3,075

La partie décimale doit s'arrêter.

• **$\mathbb{Q}$: <u>ensemble des nombres rationnels</u>** (nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs)

Nombres qui peuvent s'écrire $\dfrac{x}{y}$ ($x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}^*$)

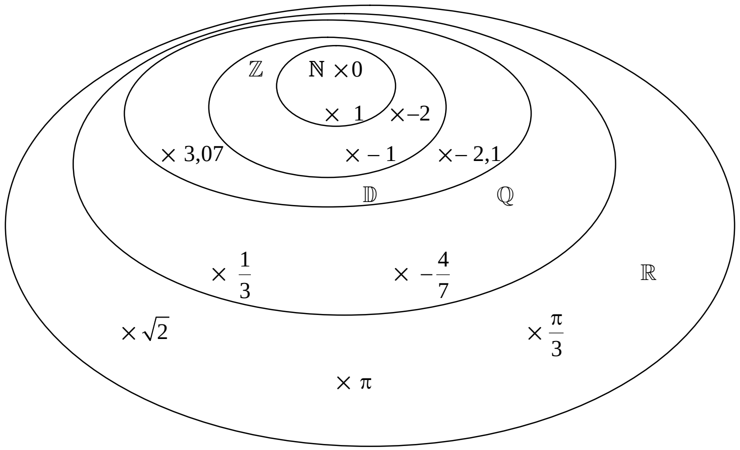
Exemples : $\dfrac{1}{3}=0{,}3333...$; $-\dfrac{4}{5}=-0{,}8$; $\dfrac{5}{7}$

• **$\mathbb{R}$: <u>ensemble des nombres réels</u>**

Exemples : π, $\sqrt{2}$

$\boxed{\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}}$

« est inclus dans »



VII. <u>Retour sur la colinéarité et l'orthogonalité des vecteurs</u>

Dans tout ce paragraphe, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

$\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ désigne l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs (sa mesure en radians est dans l'intervalle $[0\,;\pi]$).

1°) Vecteurs colinéaires

• Propriétés de caractérisation de la colinéarité à l'aide des angles géométriques

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=0$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\pi$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=0\\ \text{ou}\\ \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\pi\end{array}\right.$

• Propriétés de caractérisation de la colinéarité à l'aide des angles orientés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=0$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si et seulement si $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\pi$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=0\\ \text{ou}\\ \left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\pi\end{array}\right.$

2°) Vecteurs orthogonaux

• Propriété de caractérisation de l'orthogonalité à l'aide des angles géométriques

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

● **Propriété de caractérisation de l'orthogonalité à l'aide des angles orientés**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}(\vec{u}\,;\vec{v})=\dfrac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ (\vec{u}\,;\vec{v})=-\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$

VIII. Remarques diverses

1°) Remarque 1

On se gardera de confondre angle géométrique et angle orienté de vecteurs.
Ce n'est pas la même chose (même si nous avons vu qu'il y a un lien entre les deux).
On le voit sur le plan des notations : on a deux notations différentes.

2°) Remarque 2

Attention, les propriétés des angles géométriques (somme des mesures des angles d'un triangle quelconque, angles d'un triangle isocèle) ne se transposent pas aisément aux angles orientés.
Cette année, nous ne donnerons pas d'énoncés de propriétés dues à des configurations.

3°) Remarque 3

À la différence des angles géométriques qui peuvent être mesurés indifféremment en degrés ou en radians, les angles orientés de vecteurs seront exclusivement mesurés en radians.

4°) Remarque 4

● On ne peut écrire de français relatif à un membre d'une égalité.

On écrit « $\widehat{\text{ABC}}=26°$ » et non « l'angle $\widehat{\text{ABC}}=26°$ ».

De même, on ne peut écrire « l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\overrightarrow{\text{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ ».

● En revanche, on peut très bien employer le mot « angle » dans une phrase. Par exemple, on peut écrire une phrase du type « l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ mesure 26° » ou « $\dfrac{\pi}{3}$ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\overrightarrow{\text{AC}}\right)$ ».

IX. Gestes

Au début, pour comprendre les angles orientés, on fait des « gestes » avec le doigt sur les figures (on « mime »).
Ces gestes sont différents si l'on montre un angle géométrique de vecteurs ou un angle orienté.

Pour un angle géométrique $\widehat{\text{MON}}$, on « mime » en mettant le doigt en M, puis en O et enfin en N.
On décrit ensuite un arc de cercle pour montrer l'angle.

Pour un angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{\text{OM}},\overrightarrow{\text{ON}}\right)$, on montre avec le doigt le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ puis le vecteur $\overrightarrow{\text{ON}}$ (même si ceux-ci n'apparaissent pas sur la figure).
On décrit ensuite un arc de cercle qui « part » du vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ et qui « arrive » sur le vecteur vers $\overrightarrow{\text{ON}}$ avec une flèche pour montrer l'angle orienté. On peut le faire dans deux sens.

Il s'agit d'une « approche tactile » des angles orientés.