$1^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les angles orientés (1)

Dans tous les exercices, le plan est orienté.

Triangle direct - triangle indirect :

Le triangle ABC est *direct* signifie que, lorsque l'on parcourt le cercle circonscrit au triangle dans le sens direct en partant de A, on rencontre B puis C.

Le triangle ABC est *indirect* signifie que, lorsque l'on parcourt le cercle circonscrit au triangle dans le sens direct en partant de A, on rencontre C puis B.

N.B. : On n'a pas besoin de tracer le cercle circonscrit ; on se contente de l'imaginer dans sa tête.

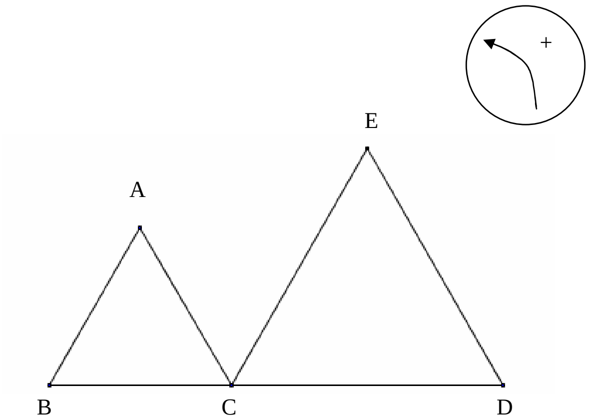
Autre explication :

On imagine que l'on trace le cercle circonscrit au triangle ABC.
Le triangle ABC est *direct* lorsqu'en parcourant le cercle dans le sens direct on rencontre A, B, C dans cet ordre.
Le triangle ABC est *indirect* lorsque, en parcourant le cercle dans le sens indirect, on rencontre les points A, B, C dans cet ordre.

1 On considère la figure ci-dessous.
Les triangles ABC et CDE sont équilatéraux directs.
Les points B, C, D sont alignés.

Reproduire la figure ci-dessous et marquer les angles orientés $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}\right)$.

Donner une mesure en radians de chacun de ces angles orientés.



Rédaction-type :

Une mesure en radians de l'angle orienté … est ….

Il n' y a pas à justifier.

2 Soit ABC un triangle équilatéral direct.

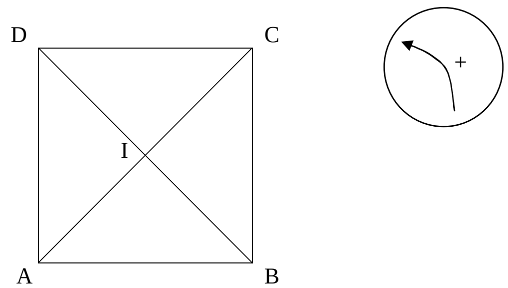
Faire une figure en prenant (BC) « horizontale », A au-dessus de (BC), B à gauche de C.

Déterminer une mesure en radians de chacun des angles orientés :
$\left(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CB}\right)$.

On répondra sans justifier en rédigeant selon la phrase de réponse type :
« Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}\right)$ est … ».

On pourra introduire des points.
Pour cela, on définira clairement chaque point introduit par une égalité vectorielle puis on le placera sur la figure.

3 Soit ABCD un carré direct de centre I.



Déterminer une mesure en radians de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{IB} ; \overrightarrow{IA}\right)$, $\left(\overrightarrow{IB} ; \overrightarrow{ID}\right)$, $\left(\overrightarrow{IB} ; \overrightarrow{CI}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{ID}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{CI}\right)$.

Remarque :
Dans un angle orienté, on peut remplacer un vecteur par un vecteur égal de manière à se ramener à deux vecteurs qui ont la même origine.
Ne pas créer de nouveau point.

4 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté tels que $\left(\vec{u} ; \vec{v}\right) = \frac{\pi}{4}$.

1°) Recopier et compléter la phrase :
« Les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)$ sont tous les nombres de la forme ... ».
Illustrer ces mesures sur la droite réelle en indiquant les multiples entiers de π.

Ce graphique sert uniquement à visualiser l'ensemble des mesures en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

2°) Parmi toutes ces mesures, une seule appartient à l'intervalle $\left[-2\pi\,;0\right]$. Laquelle ?

5 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ qui appartient à l'intervalle $\left[-3\pi\,;-\pi\right]$.

6 1°) Les nombres $\dfrac{17\pi}{3}$ et $-\dfrac{7\pi}{3}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté de vecteurs dans le plan orienté ?

2°) Les nombres $-\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{14\pi}{5}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté de vecteurs dans le plan orienté ?

Corrigé

Pour chaque angle orienté, on peut donner facilement deux mesures, l'une correspondant à l'angle saillant, l'autre correspondant à l'angle rentrant. Ces deux mesures sont de signes opposés.

Les gestes sont extrêmement importants.

En règle générale, on ne trace pas les vecteurs des angles orientés sauf éventuellement lorsque les vecteurs n'ont pas la même origine.

Le dimanche 31-5-2015

Préciser qu'on peut noter de manière positive ou négative chaque angle.
On peut donner aussi bien π que $-\pi$ comme mesure en radians pour l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{ID}\right)$ de l'exercice $\boxed{3}$.
Si on demande une mesure d'un angle, on peut donner aussi bien une mesure positive qu'une mesure négative.

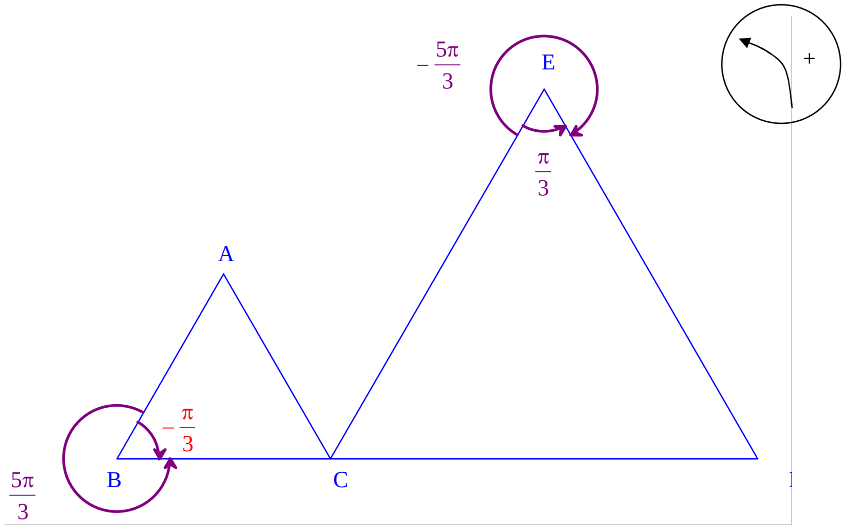
$\boxed{1}$

Figure à faire au compas pour placer les points A et E.

On prend bien B, C, D alignés sur une même droite horizontale.

- On trace les triangles équilatéraux à l'aide du compas.

- On peut faire apparaître les mesures correspondant à l'angle rentrant ou saillant.



On peut éventuellement marquer les codages pour les segments de même longueur (un trait pour l'égalité des longueurs des côtés du triangle ABC, deux traits pour l'égalité des longueurs des côtés du triangle CDE).

Donnons une mesure en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}\right)$.

Les angles orientés font intervenir des vecteurs ayant la même origine.
On repasse aux angles géométriques associés aux angles orientés.

- $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$

On sait que dans un triangle équilatéral, tous les angles mesurent 60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad.

Si on demande de donner une mesure en radian des angles orientés, on peut utiliser le cours (exemple : $60° = \frac{\pi}{3}$).

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont la même origine B.
L'angle géométrique associé à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ est $\widehat{ABC}$.

$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$

Compte tenu de l'orientation : $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{3}}$.

On peut passer par l'angle géométrique saillant ou rentrant (donnent deux mesures en radians de signes contraires).

- $\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}\right)$

De même, $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}\right) = \frac{\pi}{3}}$.

On peut dire que :

$-\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.
$\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}\right)$.

On ne marque ni le + ni le radian.

$\boxed{2}$

vecteurs origines différentes $\longrightarrow$ vecteurs (représentants) ayant la même origine

choix

$\longrightarrow$ mesure en radians de l'angle géométrique saillant ou rentrant

$\longrightarrow$ mesure en radians de l'angle orienté (signe obtenu en tenant compte de l'orientation)

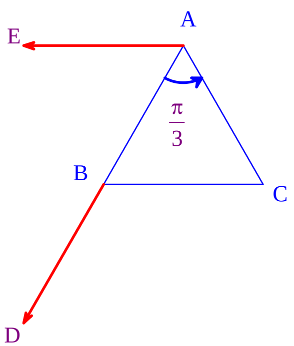
Le résultat est indépendant du choix de l'origine.

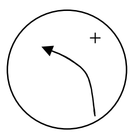
Figure

On utilise le compas.

On prend (BC) horizontale.

Attention, cette disposition des lettres A, B, C est propre au triangle équilatéral (et plus généralement à un triangle isocèle en A). Pour un triangle quelconque, on prend plutôt (AB) horizontale, A à gauche de B et C au-dessus de (AB).





Déterminons une mesure en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CB}\right)$.

- Marquer les angles orientés considérés sur les figures (faire plusieurs figures).

- Lorsque les vecteurs n'ont pas la même origine, on se ramène toujours à deux vecteurs ayant la même origine.

Réponses :

- Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$ est $-\dfrac{\pi}{3}$.
- Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$ est $\dfrac{\pi}{3}$.
- Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AB}\right)$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$.
- Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CB}\right)$ est $-\dfrac{\pi}{3}$.

• $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$

ABC est un triangle équilatéral.

Or dans un triangle équilatéral, tous les angles mesurent 60° ou $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

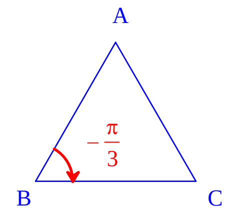
L'angle géométrique saillant associé à $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$ est $\widehat{ABC}$.

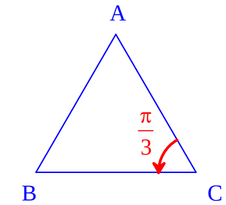
L'angle géométrique saillant associé à $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$ est $\widehat{ACB}$.

On pourrait tout aussi bien considérer les angles rentrants.

Donc $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\dfrac{\pi}{3}$ d'où compte tenu de l'orientation,

$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{3}}$ et $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\pi}{3}}$.





• $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$ n'ont pas la même origine. On introduit un nouveau point de manière à se ramner à des représentants ayant la même origine.

On peut par exemple décider de se ramener à des vecteurs ayant pour origine A.
On pourrait tout aussi bien décider de se ramener à des vecteurs ayant pour origine B ou C.

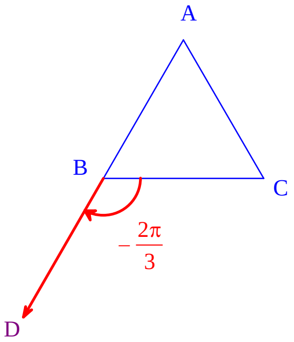
On note D le point tel que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}$.
On peut aussi écrire : « On note D le symétrique de A par rapport à B. ».

Ainsi : $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BD}\right)$.

Or $\widehat{CBD}=\pi-\widehat{ABC}=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$ (le π correspond à la mesure en radians de l'angle plat $\widehat{ABD}$).

D'où, vue l'orientation observée sur la figure, $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BD}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}}$.



• $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CB}\right)}$

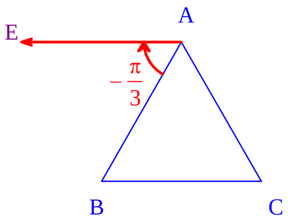
Les deux vecteurs ont la même extrémité. On va donc se ramener à deux vecteurs ayant la même origine.

De même, soit E le point tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$.
Alors : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

On s'intéresse à l'angle saillant $\widehat{BAE}$. On pourrait tout autant bien considérer l'angle rentrant BAE.

L'angle saillant $\widehat{BAE}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{CBA}$ car il s'agit deux angles alterne-internes.

Compte tenu de l'orientation, $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{\pi}{3}}$.



Bilan cet exercice :

On introduit un nouveau point lorsque l'on cherche une mesure d'un angle orienté de 2 vecteurs n'ayant pas la même origine.
On peut cependant déterminer une mesure en utilisant les propriétés du cours sur les angles orientés.

Le principe est de « rajouter » des points pour se ramener à des vecteurs ayant la même origine.

$\boxed{3}$

Faire une figure pour chaque angle.
L'idée de l'exercice : trouver des égalités de vecteurs pour qu'ils aient la même origine.
On peut donner une mesure positive et une mesure négative de chaque angle orienté.

Pour déterminer les mesures des angles orientés demandés,

- on regarde si les deux vecteurs ont la même origine ;
- s'ils n'ont pas la même origine (on conserve intact l'un des deux vecteurs, le premier ou le deuxième, cela n'a pas d'importance, et l'on remplace l'autre par un vecteur qui lui est égal) ;
- on considère alors l'angle géométrique associé à l'angle orienté (pour les vecteurs ayant la même origine) ;
- on détermine la mesure de cet angle géométrique en utilisant les propriétés du carré* ;
- on revient à l'angle orienté en regardant le sens dans lequel on tourne pour aller du 1er vecteur de l'angle orienté au 2e vecteur**.

* Tous les angles d'un carré sont droits ; les diagonales d'un carré se coupent à angle droit et sont les bissectrices des angles du carré.

** Pour déterminer le sens de « rotation », on pourrait tracer un cercle mais cela alourdirait la figure inutilement ; on se contente de mettre la marque de l'angle orienté (on se réfère à cette marque pour savoir le sens dans lequel on tourne).

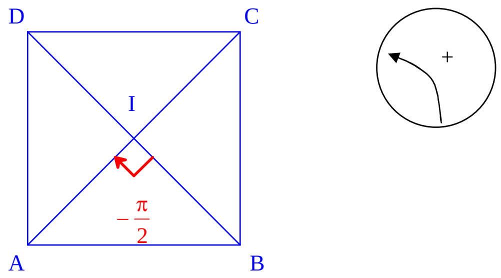
• Angle orienté $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IA}\right)}$

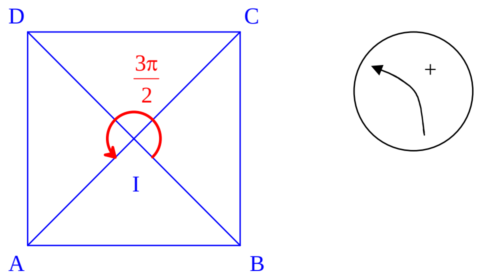
I est le centre du carré ABCD donc l'angle $\widehat{AIB}$ est droit.

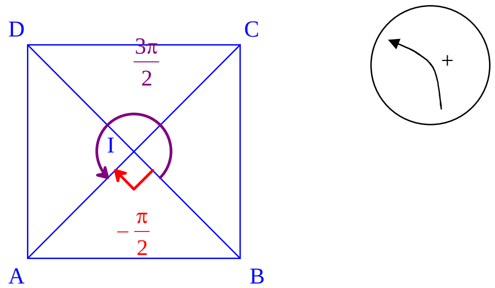
Compte tenu de l'orientation et du fait que ABCD est un carré de sens direct, on peut dire que $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IA}\right)$ est un angle droit indirect.

$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IA}\right)=-\dfrac{\pi}{2}}$ ou $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IA}\right)=\dfrac{3\pi}{2}$

On peut faire apparaître ces deux mesures sur la figure.







• Angle orienté $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{ID}\right)$

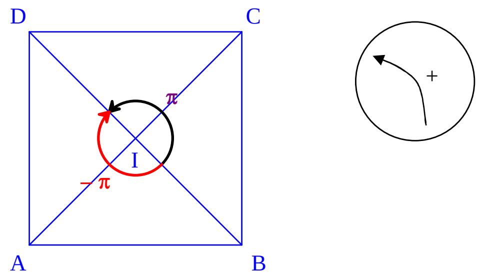
I est le centre du carré ABCD donc I est le milieu de [BD] donc $I \in [BD]$.
Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires et de sens contraire.

On peut dire que $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{ID}\right)$ est un angle plat.

Donc $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{ID}\right) = \pi$.

On peut aussi écrire : $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{ID}\right) = -\pi$.

On peut faire apparaître ces deux mesures sur la figure.



• Angle orienté $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CI}\right)$

I est le centre du carré ABCD donc I est le milieu de [AC] d'où $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$.

On peut donc écrire : $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CI}\right) = \left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IA}\right)$.

On a déjà déterminé au début de l'exercice des mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CI}\right)$.

Donc $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CI}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CI}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

On peut dire que $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CI}\right)$ est un angle droit indirect.

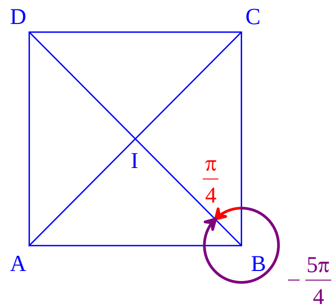
• Angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{ID}\right)$

I est le centre du carré ABCD donc I est le milieu du segment [BD].
Par suite, on a : $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI}$.

On conserve intact le premier vecteur ; on change le second.
On a donc : $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{ID}\right) = \left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BI}\right)$.

D'où $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{ID}\right) = \frac{\pi}{4}$.

On peut aussi écrire : $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{ID}\right) = -\frac{5\pi}{4}$.



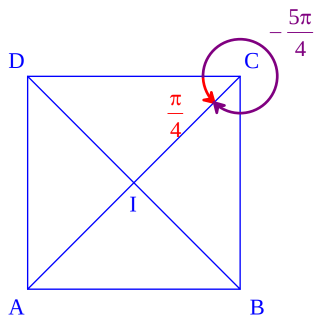
• Angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CI}\right)$

ABCD est un carré donc $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

On conserve intact le deuxième vecteur ; on change le premier.
Par suite, $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CI}\right)=\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CI}\right)$.

Donc $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CI}\right)=\frac{\pi}{4}}$.

On peut aussi écrire : $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CI}\right)=-\frac{5\pi}{4}$.



Bilan cet exercice :

La méthode consistant à créer des points est importante même si par la suite on évitera de l'employer.

Dans le chapitre suivant, on verra des règles permettant d'éviter de créer des points lorsque les deux vecteurs n'ont pas la même origine.

$\boxed{4}$

$\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\frac{\pi}{4}$

Solution détaillée :

1°) **Recopions et complétons la phrase :**

Les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ sont les réels de la forme $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Justification :

On sait que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

Donc d'après le cours, les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ sont les réels de la forme $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Il s'agit d'une phrase de rédaction-type à apprendre par cœur.

Dans la formule $2k\pi$, le k représente quoi ?

Rien

On s'en fiche du k.

On ne se pose pas la question de savoir ce que représente k.

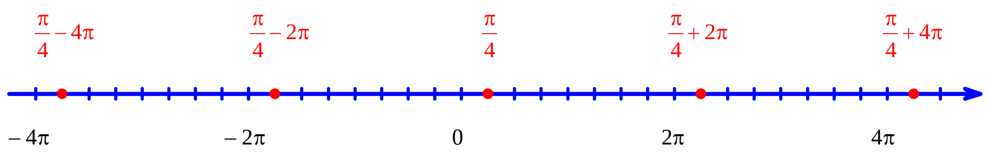
On peut représenter ces mesures sur la droite réelle (image mentale importante).

On place 0 et 2π (en choisissant un écartement).

Le 2π vient d'où ? vient du $2k\pi$. Toutes les mesures.

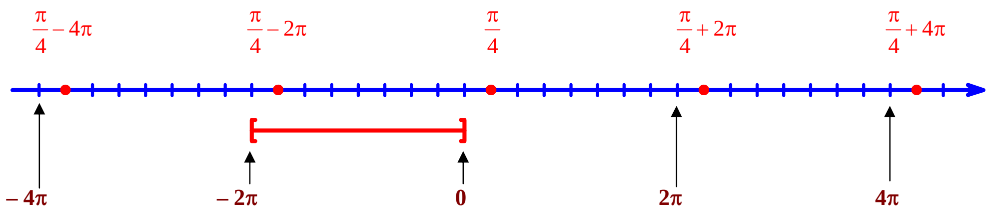
Puis on gradue selon tous les multiples entiers de 2π.

Ensuite, pour placer $\frac{\pi}{4}$, on sait que $\frac{\pi}{4}$ est le huitième de 2π. Donc on subdivise selon les segments en huit.



2°) **Déterminons la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ qui appartient à l'intervalle $[-2\pi\,;0]$.**

On utilise la représentation des mesures en radian de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ sur la droite réelle.



La mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ qui appartient à l'intervalle $[-2\pi\,;0]$ est $\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$.

Quand on veut calculer la mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ comprise dans un intervalle, il faut encadrer par π et $-\pi$, puis retirer 2π à chaque mesure.

$\boxed{5}$

Solution détaillée :

$$(\vec{u}\,;\vec{v})=\frac{2\pi}{3}$$

Déterminons la mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ qui appartient à l'intervalle $[-3\pi\,;-\pi]$.

Il est demandé de noter les deux méthodes car chacune a son importance.

1ère méthode : assez astucieuse à retenir

On a : $-\pi\leqslant\frac{2\pi}{3}\leqslant\pi$ (le signe $\leqslant$ peut sembler incorrect ; il est pourtant tout à fait juste de l'employer même si on pourrait effectivement avoir envie d'employer plutôt le symbole $<$).

En retirant 2π à chaque membre de l'inégalité, on obtient : $-\pi-2\pi\leqslant\frac{2\pi}{3}-2\pi\leqslant\pi-2\pi$ soit

$-3\pi\leqslant-\frac{4\pi}{3}\leqslant-\pi$.

La mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ qui appartient à l'intervalle $[-3\pi\,;-\pi]$ est $-\frac{4\pi}{3}$.

2e méthode : à connaître car permet de s'en sortir dans des situations moins évidente

On sait que les mesures en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ sont tous les réels de la forme $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

On cherche la mesure en radians qui appartient à l'intervalle $[-3\pi\,;-\pi]$.

On cherche donc l'entier relatif k tel que $-3\pi\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant-\pi$ (1).

Dans ce qui suit, nous utilisons de manière exceptionnelle le symbole d'équivalences, ce pour plus commodité pour présenter la chaîne d'équivalences. Son utilisation sera autorisée plus tard.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow -3\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant 2k\pi\leqslant-\pi-\frac{2\pi}{3}\\
&\Leftrightarrow -\frac{11\pi}{3}\leqslant 2k\pi\leqslant-\frac{5\pi}{3}\\
&\Leftrightarrow -\frac{11}{6}\leqslant k\leqslant-\frac{5}{6} \quad \text{(on divise les deux membres par } \pi)\\
&\Leftrightarrow k=-1 \quad \left(\text{car } -\frac{11}{6}=-1{,}83333\ldots \text{ et } -\frac{5}{6}=-0{,}833333\ldots \text{ et aussi car } k\in\mathbb{Z}\right)
\end{aligned}$$

La mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ qui appartient à l'intervalle $[-3\pi\,;-\pi]$ est donc $\frac{2\pi}{3}-2\pi=-\frac{4\pi}{3}$.

Bilan des deux méthodes :

1ère méthode :

On part de l'encadrement $-\pi\leqslant\frac{2\pi}{3}\leqslant\pi$ et l'on retranche à chaque membre un multiple entier convenable de 2π.

Pour cette méthode, il est possible de s'appuyer sur une représentation graphique similaire à celle effectuée dans l'exercice précédent : on représente les mesures en radians de l'angle orienté sur une droite réelle. Cela permet de « visualiser » le problème.

2e méthode :

On résout une inéquation.

$\boxed{6}$

Méthode :

On calcule la différence entre les deux mesures proposées et l'on regarde si le résultat est un multiple **entier** de 2π.

On fait la différence dans un sens ou dans l'autre, ça ne change rien.

On utilise le corollaire de la propriété sur les mesures d'un angle orienté (il est inutile de la citer).

x et y sont deux mesures en radians d'un même angle orienté de vecteurs si et seulement si $x-y$ est un multiple entier de 2π (c'est-à-dire $x-y=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$).

1°) **Déterminons si $\frac{17\pi}{3}$ et $-\frac{7\pi}{3}$ sont des mesures en radians d'un même angle orienté.**

$$\frac{17\pi}{3}+\frac{7\pi}{3}=8\pi$$
$$=4\times 2\pi$$

Or $4\in\mathbb{Z}$ donc **$\frac{17\pi}{3}$ et $-\frac{7\pi}{3}$ sont des mesures en radians d'un même angle orienté**.

Autre méthode suggérée par l'élève Ana Ganet le vendredi 28-12-2018

On part de $-\frac{7\pi}{3}$. On ajoute 2π, 4π etc. jusqu'à essayer d'arriver à $\frac{17\pi}{3}$.

2°) **Déterminons si $-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{14\pi}{5}$ sont des mesures en radians d'un même angle orienté.**

$$\frac{14\pi}{5}-\left(-\frac{\pi}{5}\right)=3\pi$$
$$=\frac{3}{2}\times 2\pi$$

Or $\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$ donc **$-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{14\pi}{5}$ ne sont pas des mesures en radians d'un même angle orienté**.

Autre méthode :

Une autre méthode consisterait à déterminer les mesures principales correspondant aux mesures données.
Cette méthode est plus longue, moins efficace et donc à éviter.

Le mardi 29 novembre 2016

Dimitri Fontanille a noté :

- On effectue la soustraction, peu importe l'ordre.

- On regarde si le résultat peut s'écrire sous la forme $2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.