1ère S1

Contrôle du vendredi 9 janvier 2015 (30 min)

Prénom : ………………………………..…… **Nom :** ……………………………..…… **Note : …. / 20**

Dans les exercices **I** et **II**, le plan est orienté.
Ne rien écrire sur les figures en dehors de ce qui est demandé.

I. (1 point)

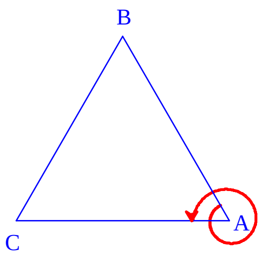
Sur la figure suivante, ABC est un triangle équilatéral direct.
Quel est l'angle orienté de vecteurs représenté sur la figure ? Quelle est la mesure en radians de cet angle représentée sur la figure ?
Répondre par une phrase puis écrire cette mesure sur la figure.

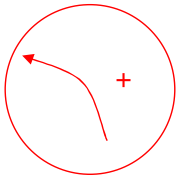
……

……

……

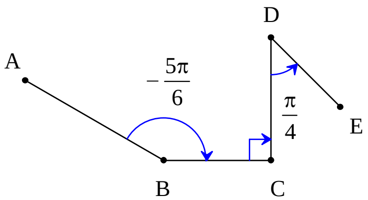
……

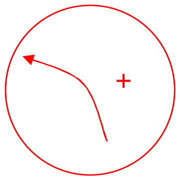




II. (3 points)

On considère la figure suivante.





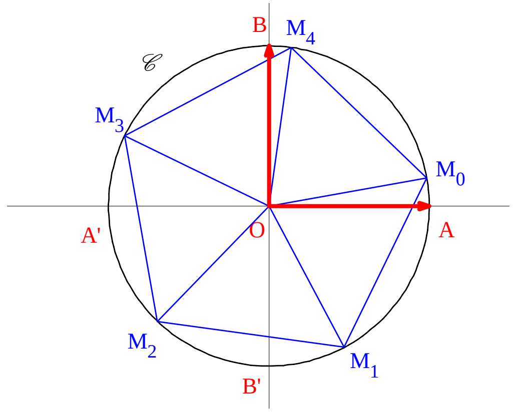
Traduire sous la forme d'égalités les trois mesures en radians d'angles orientés représentées sur la figure.
Marquer la mesure d'angle manquante sur la figure.

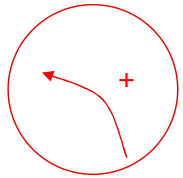
$(\ldots\ldots;\ldots\ldots) = \ldots\ldots$; $(\ldots\ldots;\ldots\ldots) = \ldots\ldots$; $(\ldots\ldots;\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

Dans les exercices **III** et **IV**, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), A'(– 1 ; 0), B'(0 ; – 1).
Ne rien écrire sur les figures en dehors de ce qui est demandé.

III. (5 points)

Soit $M_0M_1M_2M_3M_4$ un pentagone régulier convexe de sens indirect inscrit dans $\mathscr{C}$.
On note x une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_0}\right)$; le point M_0 est donc l'image du réel x sur le cercle trigonométrique.





1°) Donner en fonction de x un réel associé à chacun des points M_1, M_2, M_3, M_4.

M_1 : M_2 : M_3 : M_4 :

2°) Déterminer les réels x tels que le point M_2 soit confondu avec le point A'.
On utilisera une chaîne d'équivalences selon le modèle suivant à compléter :

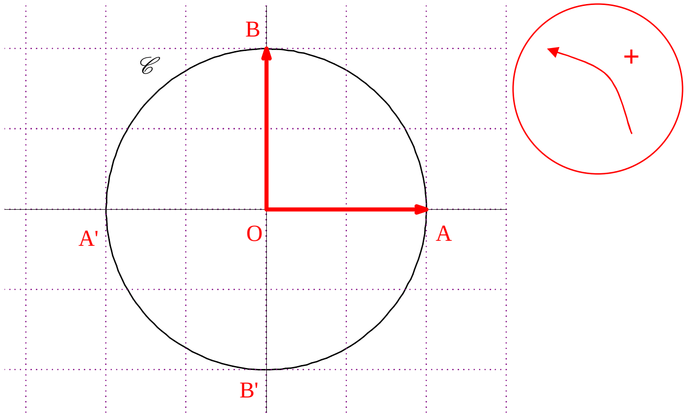
$M_2 = A'$ si et seulement si …………………………………………………

si et seulement si …………………………………………………

IV. (5 points)

On note C et D les images respectives de $\frac{5\pi}{4}$ et $-\frac{170\pi}{3}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.

1°) Placer le point C sur la figure. Aucune explication n'est demandée.



2°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right)$? Répondre sans justifier et représenter cette mesure sur la figure.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right)$ est égale à ……………. .

3°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OD}\right)$? Répondre sans justifier ; placer le point D sur la figure et représenter la mesure principale.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OD}\right)$ est égale à ……………. .

4°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[0\,;2\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

…………………………………..

V. (6 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = $...

2°) Compléter la phrase :

f' s'annule en …………………………………………… .

3°) Étudier dans un même tableau le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

On calculera au brouillon les extremums locaux.
On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

Corrigé du contrôle du 9-1-2015

Dans les exercices **I** et **II**, le plan est orienté.
Ne rien écrire sur les figures en dehors de ce qui est demandé.

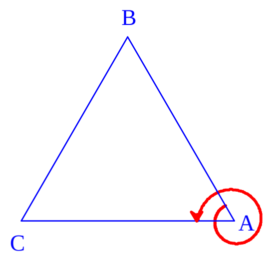
I.

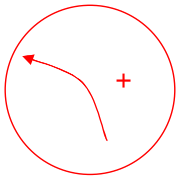
Sur la figure suivante, ABC est un triangle équilatéral direct.
Quel est l'angle orienté de vecteurs représenté sur la figure ? Quelle est la mesure en radians de cet angle représentée sur la figure ?
Répondre par une phrase puis écrire cette mesure sur la figure.

Il faut nommer l'angle orienté (question posée par un élève durant l'épreuve).
L'énoncé dit qu'il s'agit d'un angle orienté de vecteurs. Il ne s'agit donc pas d'un angle géométrique (certains élèves ont parlé de l'angle rentrant $\widehat{CAB}$.

L'angle orienté présenté sur la figure est l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.

La mesure qui apparaît est $\dfrac{7\pi}{3}$.





Commentaires :

① Les angles géométriques d'un triangle équilatéral mesurent $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

La mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ donnée ici provient du calcul : $\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{7\pi}{3}$.

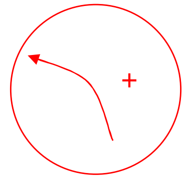
② La flèche de l'angle nous montre un déplacement dans le sens direct.
On ne dit pas pour autant que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est de sens direct. Parler d'angle orienté de sens direct ou indirect n'a pas de sens.

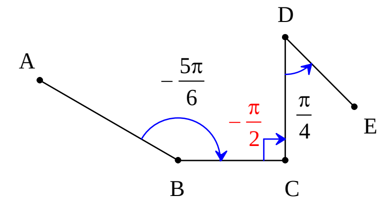
③ $\dfrac{\pi}{3}$ est aussi une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ mais ce n'est pas celle qui est représentée sur la figure.

④ On ne repasse pas en degrés (un élève m'a parlé de 420 °) !

II.

On considère la figure suivante.





Traduire sous la forme d'égalités les trois mesures en radians d'angles orientés représentés sur la figure.
Marquer la mesure d'angle manquante sur la figure.

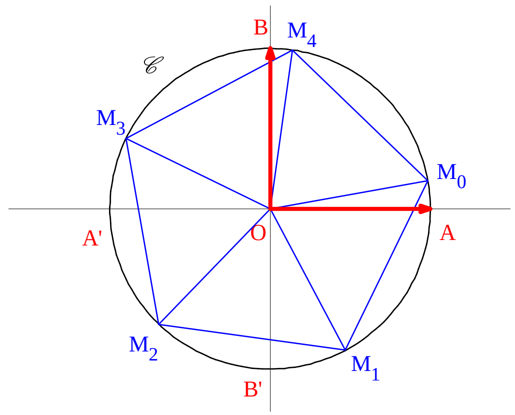
$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{5\pi}{6}$; $\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$; $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

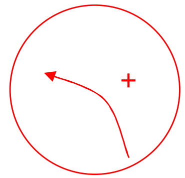
Quelques élèves se sont trompés et ont écrit $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{5\pi}{6}$; $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{CD}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$; $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{DE}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Dans les exercices **III** et **IV**, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), A'(– 1 ; 0), B'(0 ; – 1).
Ne rien écrire sur les figures en dehors de ce qui est demandé.

III.

Soit $M_0M_1M_2M_3M_4$ un pentagone régulier convexe de sens indirect inscrit dans $\mathscr{C}$.
On note x une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM_0}\right)$; le point M_0 est donc l'image du réel x sur le cercle trigonométrique.





$M_0M_1M_2M_3M_4$ est un pentagone régulier convexe.
L'énoncé précise de plus qu'il est *indirect*.
Cela signifie que lorsque l'on tourne sur le cercle trigonométrique dans le sens indirect, on rencontre dans l'ordre les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4.
On n'avait cependant pas à se soucier de cela, la figure montrant la disposition correspondante.

1°) Donner en fonction de *x* un réel associé à chacun des points M_1, M_2, M_3, M_4.

$M_1 : x-\dfrac{2\pi}{5}$ $\qquad$ $M_2 : x-\dfrac{4\pi}{5}$ $\qquad$ $M_3 : x-\dfrac{6\pi}{5}$ $\qquad$ $M_4 : x-\dfrac{8\pi}{5}$

ou

$M_1 : x+\dfrac{8\pi}{5}$ $\qquad$ $M_2 : x+\dfrac{6\pi}{5}$ $\qquad$ $M_3 : x+\dfrac{4\pi}{5}$ $\qquad$ $M_4 : x+\dfrac{2\pi}{5}$

Commentaires :

On doit déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM_0} ; \overrightarrow{OM_1}\right)$.

Pour cela, on doit considérer l'angle géométrique associé $\widehat{M_0OM_1}$.
On n'utilise pas le rapporteur pour déterminer cette mesure !
On utilise la propriété suivante : les angles au centres d'un polygone régulier ont la même mesure.

On l'applique au pentagone $M_0M_1M_2M_3M_4$: les angles géométriques $\widehat{M_0OM_1}$, $\widehat{M_1OM_2}$, $\widehat{M_2OM_3}$, $\widehat{M_3OM_4}$, $\widehat{M_4OM_0}$ ont tous la même mesure.

La mesure en radian de chacun de ces angles géométriques est donc égale à $\dfrac{2\pi}{5}$.

Compte tenu de l'orientation, comme le pentagone est indirect, $\left(\overrightarrow{OM_0} ; \overrightarrow{OM_1}\right)=-\dfrac{2\pi}{5}$.

Cet exercice fait intervenir la relation de Chasles de manière cachée.
En effet, on peut écrire : $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM_1}\right)=\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM_0}\right)+\left(\overrightarrow{OM_0} ; \overrightarrow{OM_1}\right)$ donc $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM_1}\right)=x-\dfrac{2\pi}{5}$.
Il s'agit d'un cas où l'on visualise la relation de Chasles sur la figure (ce n'est cependant pas très évident ici selon le sens dans lequel on tourne).

2°) Déterminer les réels *x* tels que le point M_2 soit confondu avec le point A'.
On utilisera une chaîne d'équivalences selon le modèle suivant à compléter :

$$M_2 = A' \text{ si et seulement si } x-\frac{4\pi}{5}=\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\text{si et seulement si } x=\frac{9\pi}{5}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Avec la deuxième façon de donner les réels associés aux sommets du pentagone, on trouve :

$$M_2 = A' \text{ si et seulement si } x=-\frac{\pi}{5}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

On utilise la propriété suivante [condition nécessaire et suffisante pour que les images de deux réels soient confondues].

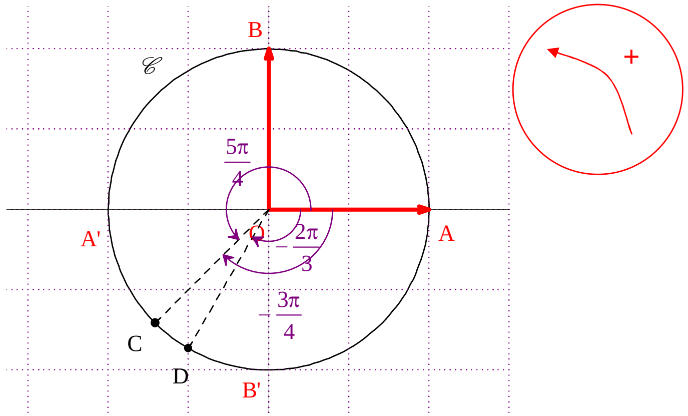
Soit *x* et *y* deux réels.
On note M et N leurs images respectives sur le cercle trigonométrique.

M et N sont confondus si et seulement si $x=y+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

IV.

On note C et D les images respectives de $\dfrac{5\pi}{4}$ et $-\dfrac{170\pi}{3}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.

1°) Placer le point C sur la figure. Aucune explication n'est demandée.



On place C avec précision sachant que la droite (OC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A'OB'}$ en s'aidant des carreaux.

On trace le segment [OC] en traits pleins ou en pointillés (on ne trace pas le vecteur $\overrightarrow{OC}$).

2°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC}\right)$? Répondre sans justifier et représenter cette mesure sur la figure.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC}\right)$ est égale à $-\dfrac{3\pi}{4}$.

3°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OD}\right)$? Répondre sans justifier ; placer le point D sur la figure et représenter cette mesure sur la figure.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OD}\right)$ est égale à $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Justification rapide : $-\dfrac{170\pi}{3}=-56\pi-\dfrac{2\pi}{3}$

On place D avec précision sachant que le triangle O A' D est isocèle soit au compas, soit en s'aidant des carreaux (le projeté orthogonal de D sur l'axe des abscisses est le milieu de [O A'].
On trace le segment [OD] en traits pleins ou en pointillés (on ne trace pas le vecteur $\overrightarrow{OD}$).

4°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $\left[0\,;2\pi\right]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

$$\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$$

On remarquera que l'on trace les segments [OC] et [OD] en traits pleins ou en pointillés (on ne trace pas les vecteurs).

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x-2$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est une fonction polynôme du troisième degré.

1°) Calculer $f'(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f'(x)=-x^2+2x+3$$

On vérifie éventuellement (bien que le calcul soit tout de même très simple) avec la calculatrice (Symbolic) mais on ne donne pas le résultat tel qu'il s'affiche sur l'écran.
Symbolic affiche en effet : $(2*\mathrm{X}+3)-\mathrm{X}\wedge 2$.

2°) Compléter la phrase :

f' s'annule en – 1 et 3.

$f'(x)$ est un polynôme du second degré.
On peut utiliser le programme de la calculatrice pour trouver les racines.

3°) Étudier dans un même tableau le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

On calculera au brouillon les extremums locaux.
On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘	$-\dfrac{11}{3}$	↗	7	↘	

f est strictement décroissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-1\right]$ et $\left[3\,;+\infty\right[$.
f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-1\,;3\right]$.

Remarques :

1. On remplit la ligne du signe de $f'(x)$ en utilisant la règle dite du « signe d'un trinôme du second degré ».

On sait que pour un polynôme ax^2+bx+c où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$ et $\Delta>0$, le polynôme est du signe du coefficient placé devant x^2 c'est-à-dire a, sauf pour x entre les racines.

Ici, le signe de $f'(x)$ est donc – 0 + 0 –.

2. On vérifie les variations en traçant la courbe représentative de f (et non de f') sur la calculatrice graphique.