Les décimales de $\sqrt{2}$

1. Objectif du travail

Trouver les premières décimales de $\sqrt{2}$ à la main sans utiliser la touche « racine carrée » de la calculatrice.
Nous nuançons la question en permettant l'utilisation des touches d'opérations (et d'exposant avec des exposants entiers) de la calculatrice.

2.

a) Point de départ :

On sait que $1^2 < 2 < 2^2$ donc $1 < \sqrt{2} < 2$ et par suite, $\sqrt{2} = 1,...$.

b) On essaye ensuite les carrés de 1,1 ; 1,2 … . On s'arrête quand on dépasse 2.
On trouve $\sqrt{2} = 1,4...$.

c) On recommence avec les carrés de 1,41 ; 1,42 …
On trouve $\sqrt{2} = 1,41...$.

d) Cette méthode est très longue. Elle ne s'arrête jamais puisque $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (donc n'est pas décimal).
Il s'agit d'une méthode par « essais successifs », appelée **« méthode de balayage »**.

3.

Nous allons utiliser une méthode plus rapide et un peu différente utilisant le « milieu » de deux nombres encadrant $\sqrt{2}$.

a) On part de $1 < \sqrt{2} < 2$.

b) On prend le « milieu » de 1 et de 2 qui est 1,5.
$1,5^2 > 2$ donc $1 < \sqrt{2} < 1,5$.

c) On prend le « milieu » de 1 et de 1,5 qui est 1,25.
$1,25^2 > 2$ donc $1,25 < \sqrt{2} < 1,5$.

d) Cette méthode est plus rapide et plus précise.
Le nombre $\sqrt{2}$ est pris comme dans un entonnoir. Cette méthode est appelée **« méthode de dichotomie »**.
Même s'il y a un test, cette méthode n'est pas une méthode par essais successifs.

4. Il n'existe pas de méthode permettant de se passer de calculs de proches en proches (nécessitant donc des essais successifs ou des tests).

Dans l'Antiquité, Héron d'Alexandrie (II^{e} siècle après Jésus-Christ) avait trouvée une méthode très astucieuse qui porte désormais son nom : méthode Héron (rectangle qui devient un carré)

5.

À cheval sur les XVII^e et XVIII^e siècles, Newton a utilisé les dérivées et les tangentes pour déterminer des approximations de $\sqrt{2}$ très rapidement (méthode dite « des tangentes » ou de Newton).
Il est amusant d'ailleurs de voir qu'à plusieurs siècles de distance cette méthode rejoint celle de Héron (qui ne connaissait pas les tangentes).

6. Bilan sur les méthodes

Jusque dans les années 1960, on enseignait aux élèves une méthode permettant de calculer à la main les premières décimales de la racine carrée d'un nombre, appelée « méthode de la potence » (on disait que c'était une méthode d'extraction de la racine carrée).
Cette méthode est tombée en désuétude avec l'apparition des calculatrices.

7. Automatisation des calculs

Toutes ces méthodes sont des méthodes algorithmiques et peuvent être mise en programme.
L'invention des calculatrices électroniques dans les années 1950 a vu également l'apparition d'un nouvel algorithme : l'algorithme CORDIC.

Les méthodes de balayage et de dichotomie peuvent être appliquées à tous types de racines (cubique, quatrième, …).

On peut également utiliser les suites.