TS1

Devoir pour le 5-1-2015

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Indication : écrire $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ sous la forme $\frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$.

2°) Le but de cette question est de déterminer « à la main » (c'est-à-dire sans utiliser la calculatrice) la partie entière de $A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

À l'aide de l'inégalité démontrée à la question précédente, déterminer un encadrement de A.

En déduire la partie entière de A.

3°) Calculer A à l'aide d'un tableur et vérifier le résultat précédent.

Corrigé du DM pour le 5-1-2015

1°) **Démontrons que** $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$= \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \qquad (1)$$

Or $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{k+1} > \sqrt{k}$.

Alors $2\sqrt{k+1} > \sqrt{k+1} + \sqrt{k} > 2\sqrt{k}$.

D'où $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

Par conséquent d'après (1), $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

2°) **Déterminons « à la main » la partie entière de** $\mathbf{A = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + < \dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right)}$.

D'après l'inégalité démontrée à la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{array}{lccccc}
\text{Pour } k=1 & \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & < & \cancel{\sqrt{2}} - 1 & < & \dfrac{1}{2\sqrt{1}} \\[2ex]
\text{Pour } k=2 & \dfrac{1}{2\sqrt{3}} & < & \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}} & < & \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\[2ex]
\text{Pour } k=3 & \dfrac{1}{2\sqrt{4}} & < & \cancel{\sqrt{4}} - \cancel{\sqrt{3}} & < & \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \\
 & & & \vdots & & \\
\text{Pour } k=10000 & \dfrac{1}{2\sqrt{10000}} & < & \sqrt{10000} - \cancel{\sqrt{9999}} & < & \dfrac{1}{2\sqrt{9999}}
\end{array}$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient : $\mathrm{A} - \dfrac{1}{2} < \sqrt{10000} - 1 < \mathrm{A} - \dfrac{1}{2\sqrt{10000}}$.

D'où $\mathrm{A} - \dfrac{1}{2} < 99 < \mathrm{A} - \dfrac{1}{200}$ soit : $99{,}005 < \mathrm{A} < 99{,}5$.

On a donc : $99 \leqslant \mathrm{A} < 100$.

Par définition de la partie entière, on a donc : $\mathrm{E}(\mathrm{A}) = 99$.

3°) **Calculons A à l'aide d'un tableur et vérifions le résultat précédent.**

À l'aide du tableur, on obtient $A = 99,2723227...$.

On retrouve ainsi $E(A) = 99$.

n	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$
1	0,5	0,5
2	0,353553391	0,853553391
3	0,288675135	1,142228525
4	0,25	1,392228525
5	0,223606798	1,615835323
6	0,204124145	1,819959468
7	0,188982237	2,008941705
8	0,176776695	2,1857184
9	0,166666667	2,352385067
…	…	…
9991	0,005002252	99,22731372
9992	0,005002001	99,23231572
9993	0,005001751	99,23731747
9994	0,005001501	99,24231897
9995	0,00500125	99,24732022
9996	0,005001	99,25232122
9997	0,00500075	99,25732197
9998	0,0050005	99,26232247
9999	0,00500025	99,26732272
10000	0,005	99,27232272