TS1 spécialité

Contrôle du mercredi 17 décembre 2014 (50 minutes)

Prénom : …………………… **Nom : ………………………………**

Note : …. / 20

Écrire très lisiblement, sans ratures ; encadrer les résultats demandés en rouge à la règle.

I. (3 points)

Soit n un entier naturel.
Déterminer le PGCD et le PPCM de $n!$ et de $(n+1)!$. Détailler la démarche brièvement.

………

………

………

………

………

………

II. (4 points)

Soit n un entier naturel. On pose $a=2n^3+5n^2+4n+1$ et $b=2n^2+n$.

1°) Compléter sans justifier l'égalité :

$$a=(2n+1)(\text{..............................})$$

2°) Démontrer que n et n^2+2n+1 sont premiers entre eux.

………

………

………

3°) En déduire le PGCD de a et de b.

………

………

………

III. (4 points)

1°) **Question de cours**

Soit a, b, c trois entiers relatifs.
Démontrer que si a est premier avec b et c, alors a est premier avec bc.

On commencera la démonstration par cette phrase : « Soit d un diviseur positif commun à a et bc ».
On utilisera ensuite le fait que d divise ab et bc.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) **Application**

Donner sans justifier le plus petit entier naturel supérieur ou égal à 2 qui est premier avec le nombre $\mathrm{A}=2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19$.

…………………… (un seul résultat sans faire de phrase)

IV. (4 points)

Soit a, b et b' trois entiers tels que b et b' soient non nuls.
Dans les divisions euclidiennes de a par b et de a par b', les restes sont des entiers consécutifs.
Démontrer que b et b' sont premiers entre eux.

………

………

………

………

………

………

………

V. (3 points)

On considère l'équation $315x-544y=10$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$.

1°) Donner sans justifier un couple solution de (E).

Le couple $(............\,;\,............)$ est un couple solution de (E).

2°) Donner sans justifier tous les couples solutions de (E).

Les couples solutions de (E) sont les couples de la forme ……………………………………………………………

………

VI. (2 points)

J'ai moins de 100 pièces.
Si je les regroupe par 2, il m'en reste une.
Si je les regroupe par 3, il m'en reste deux.
Si je les regroupe par 4, il m'en reste trois.
Si je les regroupe par 5, il m'en reste quatre.

Combien ai-je de pièces ? Expliquer la démarche.

Indication : Noter n le nombre de pièces puis démontrer que $n+1$ est un multiple de 2, de 3 etc.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 17-12-2014

I.

Soit n un entier naturel.
Déterminer le PGCD et le PPCM de $n!$ et de $(n+1)!$. Détailler la démarche brièvement.

On a : $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

Donc $n! \mid (n+1)!$.

On en déduit que $\text{PGCD}\left(n!\,;(n+1)!\right) = n!$ et $\text{PPCM}\left(n!\,;(n+1)!\right) = (n+1)!$.

Autre méthode :

$$\begin{aligned}\text{PGCD}\left(n!\,;(n+1)!\right) &= \text{PGCD}\left(n!\,;n!\times(n+1)\right)\\ &= n!\times\text{PGCD}(1\,;n+1)\\ &= n!\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{PPCM}\left(n!\,;(n+1)!\right) &= \text{PPCM}\left(n!\,;n!\times(n+1)\right)\\ &= n!\times\text{PPCM}(1\,;n+1)\\ &= n!\times(n+1)\\ &= (n+1)!\end{aligned}$$

On utiliser les propriétés suivantes du PPCM.

Propriété 1 : $\text{PPCM}(ka\,;kb) = k\text{PPCM}(a\,;b)$ (a et b entiers relatifs quelconques non tous les deux nuls, k entier naturel quelconque)

Propriété 2 : $\text{PPCM}(1\,;a) = a$ (a entier naturel quelconque)

II.

Soit n un entier naturel. On pose : $a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$ et $b = 2n^2 + n$.

1°) Compléter sans justifier l'égalité :

$$a = (2n+1)\left(n^2 + 2n + 1\right)$$

2°) Démontrer que n et $n^2 + 2n + 1$ sont premiers entre eux.

1ère méthode :

On a : $1 \times \left(n^2 + 2n + 1\right) - (n+2) \times n = 1$.

Comme 1 et $-(n+2)$ sont des entiers relatifs, grâce au théorème de Bezout, on en déduit que n et $n^2 + 2n + 1$ sont premiers entre eux.

2e méthode :

n et $n+1$ sont premiers entre eux car ce sont deux entiers naturels consécutifs.

Donc n et $(n+1)^2$ sont premiers entre eux.

3e méthode :

On a : $n^2 + 2n + 1 = n(2+n) + 1$

D'après le lemme d'Euclide, on a : $\text{PGCD}\left(n^2 + 2n + 1\,;n\right) = \text{PGCD}(n\,;1) = 1$.

3°) En déduire le PGCD de a et de b.

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(a\,;b) &= \text{PGCD}\left((2n+1)\left(n^2+2n+1\right);n(2n+1)\right)\\ &= (2n+1)\,\text{PGCD}\left(n^2+2n+1\,;n\right)\\ &= (2n+1)\times 1\\ &= 2n+1\end{aligned}$$

III.

1°) **Question de cours**

Soit a, b, c trois entiers relatifs.
Démontrer que si a est premier avec b et c, alors a est premier avec bc.

On commencera la démonstration par cette phrase : « Soit d un diviseur positif commun à a et bc ».
On utilisera ensuite le fait que d divise ab et bc.

Soit d un diviseur positif commun à a et bc.

$d \mid a$ donc $d \mid ab$

On a : $d \mid ab$ et $d \mid bc$.
Donc d est un diviseur commun à ab et bc.

Par suite, d est un diviseur de $\text{PGCD}(ab\,;bc)$ (propriété du cours) soit $d \mid \text{PGCD}(ab\,;bc)$.

Or $\text{PGCD}(ab\,;bc) = b\text{PGCD}(a\,;c) = b \times 1 = b$ ($\text{PGCD}(a\,;c) = 1$ puisque a et c sont premiers entre eux par hypothèse).

On en déduit que $d \mid b$.

On a donc $d \mid a$ et $d \mid b$.
Or a et b sont premiers entre eux par hypothèse, donc $d = 1$.

On en conclut que le seul diviseur positif commun de a et bc est 1.
Il en résulte que alors a est premier avec bc.

2°) **Application**

Donner sans justifier le plus petit entier naturel supérieur ou égal à 2 qui est premier avec le nombre
$A = 2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19$.

23 (un seul résultat sans faire de phrase)

Justification :
23 est premier avec 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
On applique la propriété du 1°).

IV.

Soit a, b et b' trois entiers tels que b et b' soient non nuls.
Dans les divisions euclidiennes de a par b et de a par b', les restes sont des entiers consécutifs.
Démontrer que b et b' sont premiers entre eux.

Notons :
r le reste de la division euclidienne de a par b :
q le quotient de la division euclidienne de a par b ;
q' le quotient de la division euclidienne de a par b'.

On a donc : $a = bq + r$.
On peut également dire que $r < b$; cette information ne nous servira cependant pas dans la suite.

On sait que les restes des divisions euclidiennes de a par b et de a par b' sont des entiers consécutifs.

Il faut donc distinguer deux cas.

1er cas : Le reste de la division euclidienne de a par b' est égal à $r+1$.

Dans ce cas, on a $a = b'q' + r + 1$.

D'où $bq + \cancel{r} = b'q' + \cancel{r} + 1$ ce qui donne $bq - b'q' = 1$.

Comme q et $-q'$ sont des entiers relatifs, d'après le théorème de Bezout (sens facile), b et b' sont premiers entre eux.

2e cas : Le reste de la division euclidienne de a par b' est égal à $r-1$.

On effectue un raisonnement analogue.

V.

On considère l'équation $315x - 544y = 10$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$.

1°) Donner sans justifier un couple solution de (E).

Le couple $(190\,;110)$ est un couple solution de (E).

Pour trouver ce couple, on peut :
- utiliser la méthode de la fonction (fonction affine avec la calculatrice) ;
- utiliser le « programme Bezout » (algorithme étendu) ;
- utiliser l'algorithme d'Euclide et on le remonte.

Complément :

Quand on calcule le PGCD de 315 et – 544, on trouve 1.

Le programme de la calculatrice fournit un couple $(x_0\,;\,y_0)$ tel que $315x_0 - 544y_0 = 1$.
Ce couple est (19 ; 11) (c'est-à-dire que l'on a : $315\times19 - 544\times11 = 1$).

Afin d'obtenir un couple solution de (E), il suffit de multiplier les deux nombres par 10.
On obtient le couple (190 ; 110) (ce couple vérifie $315\times190 - 544\times110 = 10$).

2°) Donner sans justifier tous les couples solutions de (E).

(E) $\Leftrightarrow$ $315x-544y=315\times190-544\times110$

$\Leftrightarrow$ $315(x-190)=544(y-110)$ (E′)

On en déduit que $544 \mid 315(x-190)$

Donc comme 544 et 315 premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, $544 \mid x-190$.

Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-190=544k$.

En remplaçant $x-190$ par $544k$ dans l'équation (E′), on obtient : $315\times\cancel{544}k=\cancel{544}(y-110)$ soit $y=110+315k$.

D'où finalement $x=190+544k$ et $y=110+315k$.

On vérifie que $\forall k\in\mathbb{Z}$, $315\times(190+544k)-544(110+315k)=10$.

Les couples solutions de (E) sont les couples de la forme $(190+544k\,;110+315k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

VI.

J'ai moins de 100 pièces.
Si je les regroupe par 2, il m'en reste une.
Si je les regroupe par 3, il m'en reste deux.
Si je les regroupe par 4, il m'en reste trois.
Si je les regroupe par 5, il m'en reste quatre.

Combien ai-je de pièces ? Expliquer la démarche.

Indication : Noter n le nombre de pièces puis démontrer que $n+1$ est un multiple de 2, de 3 etc.

On note n le nombre de pièces.

D'après l'énoncé,

- il existe un entier naturel a tel que $n=2a+1$ donc $n+1=2(a+1)$;
- il existe un entier naturel b tel que $n=3b+2$ donc $n+1=3(b+1)$;
- il existe un entier naturel c tel que $n=4c+3$ donc $n+1=4(c+1)$;
- il existe un entier naturel d tel que $n=5d+4$ donc $n+1=5(d+1)$.

Il en résulte que $n+1$ est un multiple commun à 2, 3, 4, 5.
C'est donc un multiple commun de leur PPCM.

On cherche le PPCM des nombres 2, 3, 4, 5.

Pour cela, on peut effectuer grouper par deux.
On a successivement : $\text{PPCM}(2\,;3)=6$, $\text{PPCM}(6\,;4)=12$, $\text{PPCM}(12\,;5)=60$ ce qui permet d'écrire .
$\text{PPCM}(2\,;3\,;4\,;5)=60$.

Avec la calculatrice Numworks, on peut trouver directement la valeur du PPCM en tapant lcm(2, 3, 4, 5) .

On en déduit que $n+1$ est un multiple de 60.
Or $n<100$ donc $n+1<101$.

Le seul multiple positif non nul de 60 strictement inférieur à 101 est 60.

On en déduit que $n+1=60$ et, par suite, que $n=59$.