

Une méthode de Blaise Pascal

Soit n est un entier naturel non nul fixé.

1°) On pose $S = 1 + 2 + \dots + n$. On peut aussi écrire $S = \sum_{k=1}^{k=n} k$.

On se propose de trouver une formule sommatoire* pour exprimer très simplement la somme S en fonction de n , en utilisant une méthode employée par Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique* de 1654.

Il partait de l'égalité :

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

Il écrivait les n égalités obtenues pour k prenant toutes les valeurs entières de 1 à n , les unes en dessous des autres, comme dans le cadre ci-dessous :

Pour $k = 1$	$2^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1$
Pour $k = 2$	$3^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1$

Pour $k = n$	$(n+1)^2 = n^2 + 2 \times n + 1$

Il ajoutait ensuite membre à membre ces n égalités, en observant des simplifications entre deux lignes successives :

n égalités	{	$\cancel{2}^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1$
		$\cancel{3}^2 = \cancel{2}^2 + 2 \times 2 + 1$
	
		$(n+1)^2 = \cancel{n}^2 + 2 \times n + 1$

Il obtenait alors :

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2 \times S + n \quad (1).$$

Recopier le dernier cadre en barrant les termes qui s'annulent.

Écrire sans expliquer l'égalité obtenue puis transformer cette égalité pour aboutir à l'égalité (1).

En déduire la formule sommatoire : $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Vérifier cette formule sommatoire en utilisant un logiciel de calcul formel.

Application : Calculer $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

2°) On pose $S' = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. On peut aussi écrire $S' = \sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

En utilisant la méthode de Pascal, mais en partant de l'égalité $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, démontrer que

$$S' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Présenter les calculs dans un cadre comme au 1°), en écrivant les différentes égalités pour k prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n et en barrant les termes qui se simplifient en diagonale.

Vérifier cette formule sommatoire en utilisant un logiciel de calcul formel.

Application : Calculer $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$.

3°) **Facultatif :**

Calculer $S'' = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$ en utilisant la méthode de Pascal, mais en partant du développement de $(k+1)^4$.

En déduire que l'on a : $S'' = S^2$.

* **Qu'est-ce qu'une formule sommatoire ?**

C'est une formule donnant une expression réduite d'une somme et permettant donc de calculer très rapidement cette somme.

Corrigé du DM pour le 17-12-2014

1°)

$2^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1$
$3^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1$
.....
$(n+1)^2 = n^2 + 2 \times n + 1$

On additionne membre à membre toutes ces égalités.

En additionnant membre à membre toutes les égalités, on remarque que des termes se simplifient.
 Le 2^2 de la première ligne se simplifie avec le 2^2 de la deuxième ligne.
 Le 3^2 de la deuxième ligne se simplifie avec le 3^2 de la troisième ligne.

Dans le membre de gauche, il reste $(n+1)^2$ qui ne se simplifie pas car il est dans la dernière égalité (il n'y a pas d'égalité ensuite).

Dans le membre de droite, il reste 1^2 et d'autres termes.

En regroupant les termes qui ont la même « fonction » dans chaque égalité, on obtient :

$$(n+1)^2 = 1^2 + (2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times n) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ termes}}$$

On peut aussi écrire directement l'égalité suivante en utilisant le symbole Σ :

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2 \times \left(\sum_{k=1}^{k=n} k \right) + n$$

soit

$$(n+1)^2 = 1^2 + 2 \times S + 1 \times n$$

soit

$$n^2 + 2n + 1 = 1 + 2 \times S + n$$

donc

$$n^2 + n = 2 \times S$$

soit

$$S = \frac{n^2 + n}{2}$$

D'où finalement :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

On obtient une formule sommatoire.

Application :

Calculons : $A = 1 + 2 + \dots + 100$.

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2 + \dots + 100 \\ &= \frac{100 \times (100 + 1)}{2} \quad (\text{on applique la formule sommatoire établie précédemment en prenant } n = 100) \\ &= \frac{100 \times 101}{2} \\ &= 5050 \end{aligned}$$

Cet exemple d'application montre l'utilité de la formule que l'on a établie.

2°)

n égalités	}	$2^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$
		$3^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$
	
		$(n+1)^3 = n^3 + 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$

On additionne membre à membre toutes ces égalités.

On obtient :

$$(n+1)^3 = 1^3 + (3 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + \dots + 3 \times n^2) + (3 \times 1 + 3 \times 2 + \dots + 3 \times n) + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n$$

On peut aussi écrire l'égalité suivante :

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3 \times \left(\sum_{k=1}^{k=n} k \right) + 3 \times \left(\sum_{k=1}^{k=n} k^2 \right) + n$$

soit

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3S' + 3S + n$$

$$(n+1)^3 = 1 + 3S' + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \quad (\text{on utilise le résultat du 1}^\circ)$$

$$(n+1)^3 = 3S' + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$(n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) = 3S'$$

$$3S' = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{2}$$

$$6S' = (n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2]$$

$$6S' = (n+1)[2(n^2 + 2n + 1) - 3n - 2]$$

$$6S' = (n+1)(2n^2 + n)$$

$$6S' = (n+1)n(2n+1)$$

On en déduit que :

$$S' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Application :

Calculons $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$.

On utilise la formule sommatoire pour S' en prenant $n = 100$.

$$B = \frac{100 \times (100+1) \times (2 \times 100 + 1)}{6}$$

$$B = 338350$$

3°)

Pour $k = 1$	$2^4 = 1^4 + 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1$
Pour $k = 2$	$3^4 = 2^4 + 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1$

Pour $k = n$	$(n+1)^4 = n^4 + 4 \times n^3 + 6 \times n^2 + 4 \times n + 1$

En additionnant membre à membre toutes ces égalités, on obtient :

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4 \times \sum_{k=1}^{k=n} k^3 + 6 \times \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4 \times \sum_{k=1}^{k=n} k + n$$

Cette égalité s'écrit aussi $(n+1)^4 = 1^4 + 4 \times S'' + 6 \times S' + 4 \times S + n$.

On obtient alors :

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = 1^4 + 4S'' + 2n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

$$n^4 + 2n^3 + n^2 = 4S''$$

Donc :

$$S'' = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

$$= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Donc $S'' = S'^2$.

Complément :

Il est intéressant de consulter le *Traité du triangle arithmétique* de Pascal accessible en ligne sur Internet dans sa version imprimée originale rédigée en français du XVII^e siècle. On y voit notamment des expressions mathématiques anciennes, à une époque où le langage mathématique était moins développé qu'aujourd'hui. Par exemple, Pascal pour parler d'une expression à la puissance 4 emploie l'expression « quarré-quarré ».