TS1

Devoir pour le 16-12-2014

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$.

1°) Étudier le sens de variation de (u_n) et (v_n).

2°) En observant que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $u_n \leqslant v_n$, démontrer que la suite (u_n) est majorée.

3°) En déduire que (u_n) converge. On note L sa limite ; on ne cherchera pas à la calculer.

4°) Démontrer que (v_n) converge également vers L.

5°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leqslant \mathrm{L} \leqslant v_n$.

6°) Quel est le sens de variation de la suite $(v_n - u_n)$?

7°) Le but de cette question est de déterminer une valeur approchée de L à 10^{-3} près.

a) Réaliser une feuille de calcul sur tableur.
Dans la première colonne, on fera figurer les valeurs de *n*.
Dans la deuxième colonne, on fera figurer les valeurs de u_n, dans la troisième celles de v_n et dans la quatrième celles de $v_n - u_n$.

b) À l'aide du tableur, déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $v_n - u_n \leqslant 10^{-3}$; en déduire une valeur approchée de L à 10^{-3} près.

Corrigé du DM pour le 16-12-2014

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$

$$v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$$

Il n'est pas possible de donner une expression explicite de u_n et donc de v_n.

1°)

• Étudions le sens de variation de (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)} = \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)} = 1+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1+\frac{1}{(n+1)^2} > 1$

Donc (u_n) est strictement croissante.

• Étudions le sens de variation de (v_n).

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)u_{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$

Or $\quad u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)u_n \quad$ et $\quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = u_n \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= u_n \left[1 + \frac{1}{(n+1)^2} + 1 + \frac{1}{n+1} 1 + \frac{1}{(n+1)^3} - 1 - \frac{1}{n} \right]$$

$$= \frac{n\left[(n+1) + (n+1)^2 + 1\right] - (n+1)^3}{n(n+1)^3}$$

$$= -\frac{u_n}{n(n+1)^3}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n > 0$ et $n(n+1)^3 > 0$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n < 0$.

Donc (v_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

2°) **Démontrons que (u_n) est majorée.**

D'après la question 1°), la suite (v_n) est strictement décroissante donc elle est majorée par son premier terme d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leqslant v_1$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant v_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant v_1$.

On en déduit que (u_n) est majorée.

3°) **Déduisons-en que (u_n) converge.**

D'après la question 1°), (u_n) est strictement croissante et d'après la question 2°), elle est majorée.
Donc (u_n) converge car toute suite croissante et majorée converge.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{L}$$

4°) **Démontrons que (v_n) converge également vers L.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{L} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 \end{array} \right\}$$

Par limite d'un produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \mathrm{L}$.

5°) **Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant \mathrm{L} \leqslant v_n$.**

(u_n) est croissante et converge vers L d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n \leqslant \mathrm{L}$.

(v_n) est décroissante et converge vers L d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \geqslant \mathrm{L}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant \mathrm{L} \leqslant v_n$.

6°) **Étudions le sens de variation de $(v_n - u_n)$.**

On sait que la suite (u_n) est strictement croissante donc la suite $(-u_n)$ est strictement décroissante.

On sait que la suite (v_n) est strictement décroissante.

Donc la suite $(v_n - u_n)$ est strictement décroissante (car la somme de deux suites strictement décroissantes est suite strictement décroissante).

7°) *L'énoncé demande d'utiliser un tableur car la calculatrice est trop limitée.*

a) **Réalisons une feuille de calcul sur tableur.**

- Le remplissage de la colonne A ne pose pas de problème.

- Dans la cellule B2, on entre la valeur 2.

- Dans la cellule B3, on saisit la formule : $\boxed{= \mathrm{B2} * \left(1 + \left(1 / \left(\mathrm{A3} \wedge 2\right)\right)\right)}$ (attention à la syntaxe).

On ne tire pas pour l'instant.

On tirera les 3 cellules en même temps.

- Dans la cellule C2, on saisit la formule : $\boxed{= \mathrm{B2} * \left(1 + \left(1 / \mathrm{A2}\right)\right)}$.

- Dans la cellule D2, on saisit la formule : $\boxed{= \mathrm{C2} - \mathrm{B2}}$.

b)

• **Déterminons un encadrement de L d'amplitude inférieur à 10^{-3}.**

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant \mathrm{L} \leqslant v_n$.

L'amplitude de cet encadrement est $v_n - u_n$.

À l'aide du tableur, on cherche donc le plus petit entier naturel *n* tels que $v_n - u_n \leqslant 10^{-3}$.

Le plus petit entier naturel *n* tel que $v_n - u_n \leqslant 10^{-3}$ est 3676 (on trouve $v_{3676} - u_{3676} = 0{,}00099975...$).

On a : $v_{3676} - u_{3676} \leqslant 10^{-3}$.

D'autre part, on sait que $u_{3676} \leqslant L \leqslant v_{3676}$ d'après la question 5°).

Donc comme $v_{3676} - u_{3676} \leqslant 10^{-3}$, on obtient un encadrement de L d'une amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.

● **Déduisons-en une valeur approchée de L à 10^{-3} près.**

On sait que $u_{3676} \leqslant L \leqslant v_{3676}$.

Or d'après le tableur, on a : $u_{3676} = 3,67507816...$ et $v_{3676} = 3,67607791...$

On peut en déduire une valeur approchée de L à 10^{-3} près.

3,676 est une valeur approchée de L à 10^{-3} près. En effet, on a : $\left| u_{3676} - L \right| \leqslant 10^{-3}$.

On peut écrire $L \approx 3,676$ (valeur approchée au millième).

On observe une coïncidence très heureuse : l'indice de u_{3676} fait intervenir les mêmes chiffres que ceux de la valeur approchée de L donnée précédemment !

● Il est possible de calculer la valeur exacte de L. On peut en effet démontrer – avec des outils qui dépassent largement le niveau de la Terminale – que $L = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$ (cf. article « Produit infini » sur Wikipedia).

● Il est probable qu'avec cette expression, on puisse démontrer que L est un nombre irrationnel et même transcendant.