Fiche sur les modules

1. Définition

$z = a + \mathrm{i}b \quad ((a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2)$

module de z $= |\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$

2. Exemples

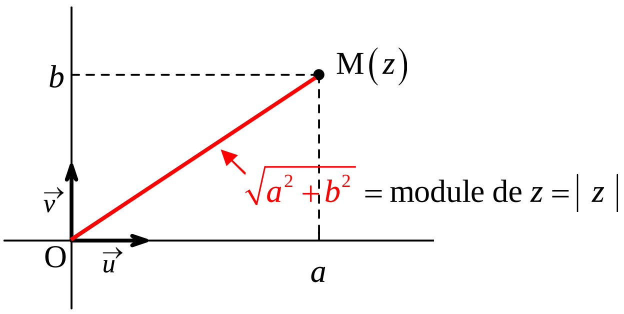
$\text{module}(3+2\mathrm{i}) = |\,3+2\mathrm{i}\,| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$\text{module}(1-2\mathrm{i}) = |\,1-2\mathrm{i}\,| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\text{module}(-5) = |\,-5\,| = \sqrt{(-5)^2+0^2} = 5$

3. Interprétation géométrique

On trace le segment $[\mathrm{OM}]$ où M est le point d'affixe z.



4. Cas de réels

$z \in \mathbb{R}$

$z = \underbrace{a}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\underbrace{0}_{\in\mathbb{R}} \quad (a \in \mathbb{R})$

module de z = valeur absolue de a

5. Expression à l'aide du conjugué (propriété primordiale)

$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |\,z\,| = \sqrt{z\bar{z}}$

On retient aussi $|\,z\,|^2 = z\bar{z}$.

6. Propriétés

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |\bar{z}| = |-z| = |z|$$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \qquad |zz'| = |z||z'|$$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |z^n| = |z|^n$$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \qquad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$ **inégalité triangulaire**

7. Applications géométriques (normes et distances)

$\vec{w}(z)$ est un vecteur quelconque.

$\|\vec{w}\| = |z|$

$A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points quelconques.

$AB = |z_B - z_A|$

8. Caractérisation d'ensembles de points en complexes

- **cercle $\mathcal{C}$** $\left|\begin{array}{l}\textbf{de centre } \Omega(a) \\ \textbf{de rayon } R > 0\end{array}\right.$ **:** $|z - a| = R$

- **médiatrice de [AB] avec $A(a)$ et $B(b)$:** $|z - a| = |z - b|$