TS1

Contrôle du mardi 2 décembre 2014 (50 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………………..……………

Note : …….. / 20

I. (8 points)

Dans chacun des cas, étudier la limite de la suite (u_n) définie par son terme général.

1°) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ 2°) $u_n = 3\sqrt{n} - n$ 3°) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$ 4°) $u_n = 4^n - 5^n$

On détaillera les « factorisations utiles ».

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

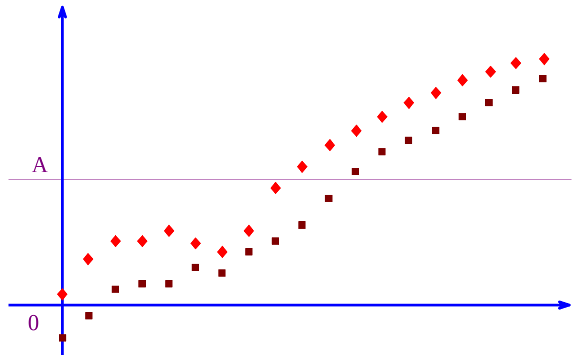
……

II. (2 points)

On rappelle le théorème suivant :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$.
Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier naturel *n* et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

On donne ci-dessous dans le désordre les éléments de la démonstration de ce théorème.



① Comme pour tout entier naturel n on a : $u_n \leqslant v_n$, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a : $v_n \geqslant u_n \geqslant \text{A}$.

② Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier naturel *N* tel que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $u_n \in \text{I}$ c'est-à-dire $u_n \geqslant \text{A}$.

③ Comme ceci est vrai pour tout intervalle I de la forme $[\text{A}\,;+\infty[$ où A est un réel, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

④ On pose $\text{I} = [\text{A}\,;+\infty[$ où A est un réel quelconque fixé.

Remettre la démonstration dans l'ordre (sans justifier).

…………………………………………………………………………………

III. (6 points)

Dans chacun des cas, étudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

1°) $u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2 + 1}$

2°) $u_n = (-1)^n - n^2$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

IV. (4 points)

Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n* non nul, on a $S_n \geqslant \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ en détaillant brièvement le raisonnement.

3°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $S_n \geqslant 5$. Répondre sans justifier.

On admettra sans démonstration que la suite (S_n) est croissante.

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 2-12-2014

I.

1°) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty\end{array}\right\}$$ donc on rencontre une forme indéterminé du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}$$
$$= \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{1}$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

On applique la propriété suivante :

> (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont positifs ou nuls.
>
> Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\ell}$.

2°) $u_n = 3\sqrt{n} - n$

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On rencontre une forme indéterminé du type "$\infty - \infty$".

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3\sqrt{n} - \sqrt{n}\times\sqrt{n}$$
$$= \sqrt{n}\left(3-\sqrt{n}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3-\sqrt{n}\right) = -\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Autre méthode : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n\left(\dfrac{3}{\sqrt{n}} - 1\right)$

3°) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On rencontre une forme indéterminé du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2^n}{3^n\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)}$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}\right) = 1$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4°) $u_n = 4^n - 5^n$

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On rencontre une forme indéterminé du type "$\infty - \infty$".

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5^n\left(\frac{4^n}{5^n} - 1\right)$$
$$= 5^n\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \dfrac{4}{5} < 1\end{array}\right\}$$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{4}{5}\right)^n - 1\right) = -1$.

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

II.

④ ② ① ③

III.

1°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$

Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

On sait $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant \sin n \leqslant 1 \quad (1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad -\dfrac{n}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{n}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ donc, d'après le théorème des gendarmes } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

2°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n - n^2$

Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

On retient $(-1)^n \leqslant 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant 1 - n^2$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-n^2) = -\infty$.

Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes (théorème d'un seul gendarme), $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

IV.

1°)

Le plus petit terme de la somme définissant S_n est $\dfrac{1}{\sqrt{n+n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

(Le plus grand terme est $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$).

Il y a n termes. On applique le principe grossier de majoration-minoration d'une somme.

On obtient : $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{nombre de termes}}}{n} \times \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant S_n \left(\leqslant n \times \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ soit $\dfrac{n}{\sqrt{2n}} \leqslant S_n \left(\leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} \right)$.

D'où $S_n \geqslant \sqrt{\dfrac{n}{2}}$ $\quad$ (car $\dfrac{n}{\sqrt{2n}} = \dfrac{\sqrt{n} \times \cancel{\sqrt{n}}}{\sqrt{2} \times \cancel{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$).

2°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{n}{2}} = +\infty$ donc d'après l'extension du théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3°)

D'après la calculatrice, le plus petit entier naturel n tel que $S_n \geqslant 5$ est 37.

Justification :

TI-83 *Plus.fr* (modèle à couvercle noir)

On se met en mode suite.

$n\text{Min} = 1$

$u(n) = \sum\limits_{\text{K}=1}^{n} \left(1/\sqrt{n+\text{K}}\right)$ [appuyer sur la touche $\boxed{\text{math}}$ puis sélectionner MATH et choisir 0 : summation Σ( ]

$u(n\text{Min}) =$ (on n'écrit rien)

On cherche ensuite dans le tableau de valeurs de la suite.

Autres modèles TI :

$u(n) = \text{somme}\left(\text{suite}\left(1/\sqrt{\ }\left(n+\text{K}\right), \text{K}, 1, n\right)\right)$

On obtient : $S_{36} = 4,94627967...$ et $S_{37} = 5,01516947...$.