Fiche sur les limites de suites

1. Définitions

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

2. Limites de référence

$\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$	$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$	$q>1 \quad q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
$n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$	$\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$	$-1<q<1 \quad q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
$n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$	$\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$	$q=1 \quad q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
$n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$	$\dfrac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$	$q\leqslant -1 \quad (q^n)$ n'a pas de limite

3. Théorèmes de comparaison

a. Théorème des gendarmes

Si $\begin{cases} u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

b. Théorème avec un seul gendarme

Si $\begin{cases} u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.	Si $\begin{cases} u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

4. Limites et monotonie

Si M est un majorant de la suite, alors tous les réels supérieurs ou égaux à M sont aussi majorants.
Si m est un minorant de la suite, alors tous les réels inférieurs ou égaux à m sont aussi minorants.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

Si (u_n) est croissante, alors $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n \leqslant L$ (L est un majorant de la suite).

Si (u_n) est décroissante, alors $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n \geqslant L$ (L est un minorant de la suite).

Théorème fondamental :

Si (u_n) est croissante majorée, alors elle converge.

Si (u_n) est décroissante minorée, alors elle converge.

Si (u_n) est croissante non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Si (u_n) est décroissante non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

5. Rappels sur les sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique

$$\text{somme} = \text{nombre} \times \frac{1^{\text{er}}\ \text{terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$\text{somme} = \left(1^{\text{er}}\ \text{terme}\right) \times \frac{1-q^{\text{nbre de termes}}}{1-q}$$

6. Majoration-minoration d'une somme

Si $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $na_1 \leqslant A \leqslant na_n$.

7. Quelques exemples

① On cherche la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 2 - n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

② On cherche la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 - n + 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(3n^2\right) = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (-n+1) = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type } "\infty - \infty".$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n^2\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 3 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit, } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

③ On cherche la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3n+1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2 + 3n + 1\right) = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (2n+1)^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type } "\frac{\infty}{\infty}".$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2.$$