Aire d'un trapèze non croisé

Objectif : démontrer la formule de l'aire d'un trapèze non croisé

Nous rappelons d'abord la définition d'un trapèze :

Un trapèze est un quadrilatère qui possède deux côtés parallèles.

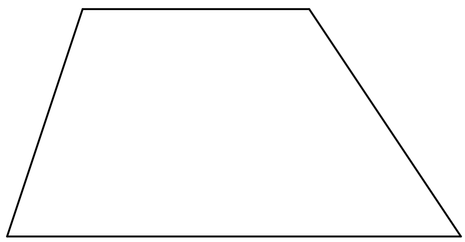


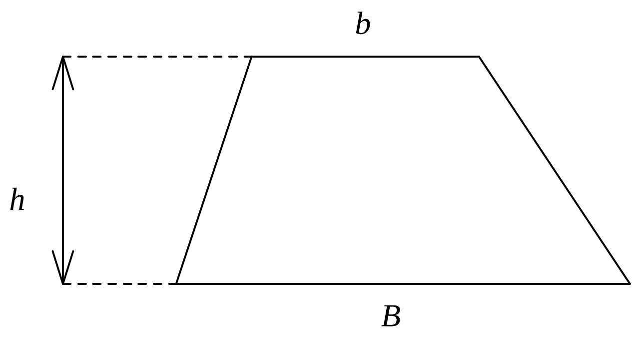
Fig. 1

Un trapèze non croisé est un trapèze tel que deux côtés quelconques ne se coupent pas en d'autres points que des sommets.

L'aire d'un trapèze non croisé est donnée par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{(b+B)\times h}{2}$$

où *b* désigne la longueur de la « petite » base,
**   *B* la longueur de la « grande » base,**
**   *h* la longueur de la hauteur.**



Nous nous conformons à l'usage de désigner les longueurs des bases par « petite » et « grande » base bien que cette appellation soit discutable ; en effet, lorsque le trapèze est un parallélogramme, il n'y a pas une base plus grande que l'autre.

Nous voulons établir cette formule.

Quelques idées :

1ère idée :

On « crée » les projetés orthogonaux des sommets de la petite base sur la grande base comme le montre la figure ci-dessous.

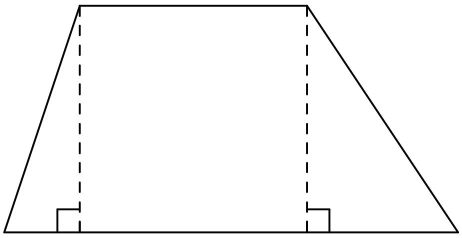


Fig. 2

On peut éventuellement nommer les points.
On mène ensuite un travail de calcul littéral classique en écrivant que l'aire du trapèze est égale à la somme des aires du rectangle et des deux triangles rectangles.

Malheureusement cette méthode ne marche pas car elle n'est pas générale comme le montrent les figures suivantes.

Nous nous gardon de nommer les sommets A, B, C, D parce que la grande base a été nommée B (donc la lettre B est déjà utilisée).

Obstacle : cette démonstration ne fonctionne pas dans le cas général comme le montrent les figurent suivantes :

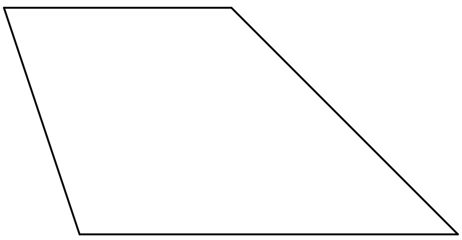


Fig. 3

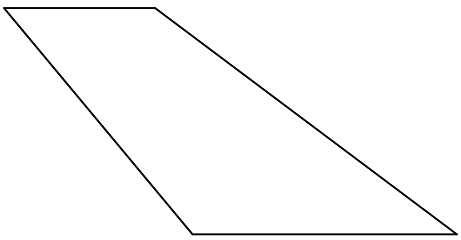


Fig. 4

Dans ces deux cas, l'un au moins des projetés orthogonaux des sommets de la petite base n'appartient pas à la grande base.

2e idée :

Fig. 5

Cette idée n'aboutit pas vraiment.

Démonstration de la formule :

On utilise une idée astucieuse : on prend un deuxième trapèze identique au trapèze initial.
Nous allons disposer ce deuxième trapèze comme le montre la figure suivante.
Il serait d'ailleurs intéressant de réaliser les figures dans du papier cartonné afin d'effectuer la manipulation.

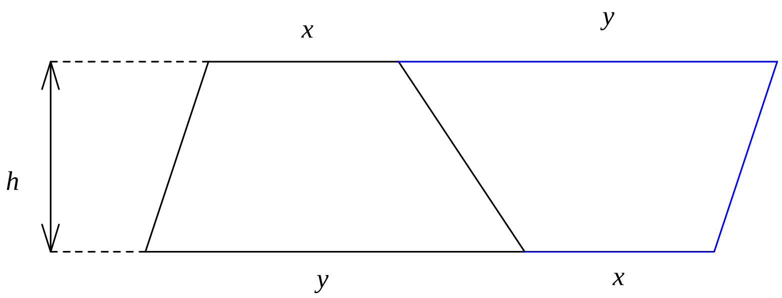


Fig. 6

La figure formée par les deux trapèzes isométriques (c'est-à-dire superposables) disposés comme sur la figure est un parallélogramme.
En effet, le quadrilatère obtenu possède deux côtés parallèles de même longueur.
De plus, c'est est un quadrilatère non croisé.
Par la formule de l'aire d'un parallélogramme, nous pouvons dire que l'aire de la figure obtenu est égale a $(x+y)h$ où x et y désigne les longueurs des bases du trapèze et h la hauteur (formule de l'aire d'un parallélogramme : base $\times$ hauteur).
L'aire du trapèze est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme donc l'aire du trapèze est égale à $\dfrac{(x+y)\times h}{2}$.

Commentaire :

Cette démonstration est générale, elle « fonctionne » pour tout trapèze non croisé. Elle doit donc être retenue car l'idée qui y présentée est intéressante.
Cette idée s'apparente au principe de « découpage-recomposition » dû au mathématicien Euclide.