1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur le nombre dérivé d'une fonction (3)

1 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x$.

1°) Démontrer que la fonction f est dérivable en 2 et donner $f'(2)$.
Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.
2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Définir par une phrase la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.

2 On considère les fonctions $f : x \mapsto -3x^2 + 2$ et $g : x \mapsto \dfrac{6}{x} - 7$.

1°) Démontrer que f et g sont dérivables en 1 et donner $f'(1)$ et $g'(1)$.
2°) On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passent par le même point A d'abscisse 1 et qu'elles admettent la même tangente en ce point.

3 On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1°) Démontrer que f est dérivable en -2 et donner $f'(-2)$.
2°) Définir par une phrase la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -2.
3°) Déterminer l'équation réduite de T.
Vérifier sur la calculatrice.

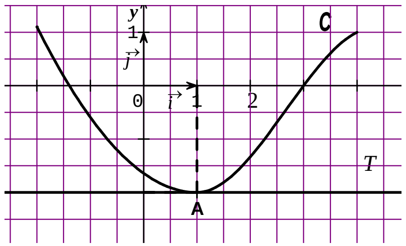
Pour les graphiques des exercices à partir du **4**, on se place dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Pour les lectures graphiques, aucune justification n'est attendue.

4 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 1 et la droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

Reproduire le graphique ci-contre.

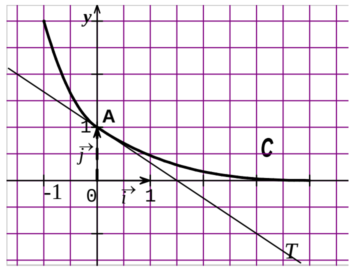
1°) Lire graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.
2°) Déterminer l'équation réduite de T.



5 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 0. La droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.

Reproduire le graphique ci-contre.

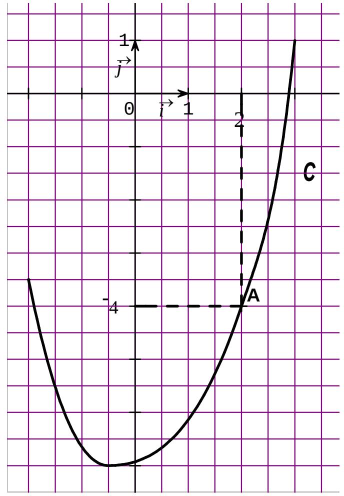
1°) Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2°) Déterminer l'équation réduite de T.



6 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 2. On sait que $f'(2) = 3$.

Reproduire le graphique ci-contre.

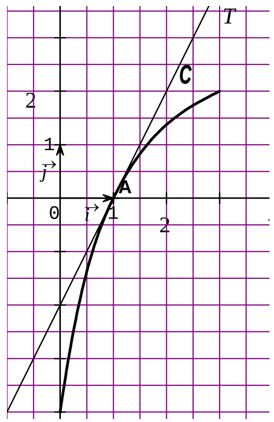
1°) Lire graphiquement $f(2)$.
2°) Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.
Quel est le coefficient directeur de T ? Tracer précisément T.
3°) Déterminer l'équation réduite de T.



7 La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 1.
La droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

Reproduire le graphique ci-contre.

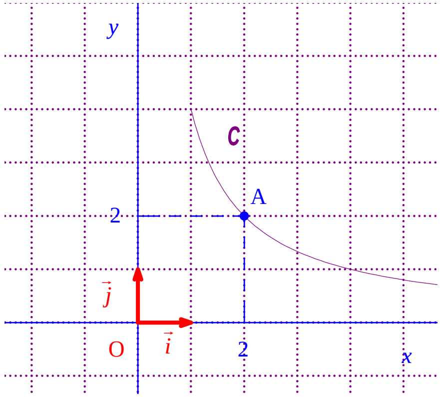
1°) Lire graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$.
2°) Déterminer l'équation réduite de T.



$\boxed{\mathbf{8}}$ La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 2. On sait que $f'(2) = -1$.

Reproduire le graphique ci-contre.

1°) Lire graphiquement la valeur de $f(2)$.
2°) Tracer la droite T tangente à $\mathcal{C}$ en A.
3°) Déterminer l'équation réduite de T.



Corrigé

Pour les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{3}$, tirer les traits de fraction à la règle.

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto x^2 - 3x$

1°)

Démontrons que la fonction f est dérivable en 2 et donnons $f'(2)$.

On connaît la démarche : on « calcule » $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ en fonction de h.

Pour cela, on calcule séparément $f(2)$ et $f(2+h)$ [on « fait » par rapport à l'expression de la fonction f]

→ Calculons $f(2)$.

$f(2)=2^2-3\times 2$ [on remplace 2 dans l'expression (et pas dans l'équation !) de la fonction f]

$\quad = -2$

→ Soit h un réel non nul. Exprimons $f(2+h)$ en fonction de h.

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^2 - 3(2+h) \\ &= 4+4h+h^2-6-3h \\ &= h^2+h-2 \end{aligned}$$

→ Exprimons $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ en fonction de h.

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{h^2+h\cancel{-2}+\cancel{2}}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(h+1)}{\cancel{h}} \quad \text{(« évanouissement » des } h\text{)} \\ &= h+1 \end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ tend vers 1.

Le résultat de cette limite est fini donc on en déduit que f est dérivable en 2 et $f'(2)=1$.

On utilise la notation du nombre dérivé ; en revanche, on n'utilise pas la notation des limites.

Vérifions le résultat à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Définissons par une phrase la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.

T est la droite passant par A et de coefficient directeur 1.

Version élève de 1ère S année scolaire 2013-2014 (Adrien Fructus) :

1°) Calculons $f'(2)$.

$f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$f'(2)=1$

2°) La tangente T est la droite de coefficient directeur 1 passant par A.

$\boxed{2}$

$f : x \mapsto -3x^2+2 \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$g : x \mapsto \dfrac{6}{x} - 7 \quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$

1°) **Démontrons que f et g sont dérivables en 1 et donner les nombres dérivés de f et g en 1.**

On connaît la démarche.

$f(1) = -3\times1^2+2$
$= -1$

Soit h un réel non nul.

$$f(1+h) = -3(1+h)^2+2$$
$$= -3(1+2h+h^2)+2$$
$$= -6h-3h^2-1$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-6h-3h^2-1+1}{h}$$
$$= \frac{-6h-3h^2}{h}$$
$$= \frac{\cancel{h}(-6-3h)}{\cancel{h}}$$
$$= -6-3h$$

Lorsque h tend vers 0, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ tend vers – 6.

Le résultat de cette limite est fini donc on en déduit que f est dérivable en 1 et $f'(1) = -6$.

$g(1) = \frac{6}{1}-7$
$= -1$

Soit h un réel non nul et différent de – 1.

$$g(1+h) = \frac{6}{1+h}-7$$
$$= \frac{-7h-1}{1+h}$$

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{\frac{-1-7h}{1+h}+1}{h}$$
$$= \frac{\frac{-6h}{1+h}}{h}$$
$$= -\frac{6\cancel{h}}{1+h}\times\frac{1}{\cancel{h}}$$
$$= -\frac{6}{1+h}$$

Lorsque h tend vers 0, $\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ tend vers – 6.
Le résultat de cette limite est fini donc on en déduit que g est dérivable en 1 et $g'(1) = -6$.

Autre façon :

$\lim\limits_{h\to0}(-3h-6) = -6$ soit $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -6$
Le résultat de la limite est fini.
Par conséquent, la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = -6$.

2°) **Démontrons que les courbes représentatives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' respectivement de f et g dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ admettent la même tangente au point A d'abscisse 1.**

On peut tracer les deux courbes sur l'écran de la calculatrice ainsi que la tangente à ces courbes en A.
Cela permet de visualiser le résultat que l'on va démontrer.

On a :

$f(1) = g(1) = -1$ (1)

$f'(1) = g'(1) = -6$ (2)

D'après (1), les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' passent donc par le même point A(1 ; – 1).
D'après (2), les tangentes en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' ont le même coefficient directeur – 6.

On en déduit que les tangentes en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont confondues.

On peut dire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont **tangentes en A** (ou au point A).

Autre façon :

$f(1) = g(1) = -1$ donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' passent toutes les deux par le point A(1 ; – 1).

$f'(1) = g'(1) = -6$ donc les tangentes en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' ont pour coefficient directeur – 6.

Par conséquent, ces deux tangentes sont confondues.

Les deux courbes sont tangentes en A.

Autre méthode (plus longue et moins astucieuse) :

Une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 s'écrit $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ soit $y = -6(x-1)-1$ ou encore $y = -6x+5$.

Une équation de la tangente T' à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 s'écrit $y = g'(1)(x-1)+g(1)$ soit $y = -6(x-1)-1$ ou encore $y = -6x+5$.

Les tangentes T et T' ont la même équation réduite donc elles sont confondues.

Version élève de 1ère S année scolaire 2013-2014 (Adrien Fructus) :

Calculons $f'(1)$.

$$f'(1) = \lim_{h\to0}\frac{-3(1+h)^2-2+3\times1^2-1}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to0}(-6)$$

Calculons $g'(1)$.

$$g'(1) = \lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$

$$g'(1) = \lim_{h\to0}(-1)$$

On a : $f(1) = -1$ et $g(1) = -1$.
Donc la courbe représentant $f(x)$ et celle de $g(x)$ sont sécantes en $x = 1$ et $y = -1$.
Donc $f(x)$ et $g(x)$ partagent la même tangente T en 1.

$\boxed{3}$

$f : x \mapsto x^3$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

C : courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1°) **Démontrons que *f* est dérivable en – 2 et donnons le nombre dérivé de *f* en – 2.**

$f(-2) = (-2)^3$
$f(-2) = -8$

Soit *h* un réel non nul.

$$f(-2+h) = (-2+h)^3 = -8 + 12h - 6h^2 + h^3$$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{-8+12h-6h^2+h^3+8}{h} = \frac{\cancel{h}\left(h^2-6h+12\right)}{\cancel{h}} = h^2 - 6h + 12$$

Lorsque *h* tend vers 0, $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$ tend vers 12.

Le résultat de cette limite est fini donc On en déduit que *f* est dérivable en – 2 et $f'(-2) = 12$.

Autre façon :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = 12$$

Le résultat de la limite est fini.

Par conséquent, *f* est dérivable en – 2 et $f'(-2) = 12$.

2°) **Définissons par une phrase la tangente *T* à C au point A d'abscisse – 2.**

La tangente *T* à **C** au point A d'abscisse – 2 est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(-2) = 12$.

3°) **Déterminons l'équation réduite de la tangente à *T*.**

1ère méthode :

Une équation de la tangente *T* à **C** au point A s'écrit $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ soit $y = 12(x+2) - 8$ ou encore $y = 12x + 16$.

Donc *T* a pour équation réduite $y = 12x + 16$.

2e méthode :

T passe par le point $A(-2\,;-8)$ et a pour coefficient directeur 12.

Donc T a pour équation $y = 12(x+2) - 8$ soit $y = 12x + 16$.

Autre méthode pour déterminer le nombre dérivé de *f* en – 2 :

En utilisant le résultat du chapitre suivant, on sait que *f* est dérivable en – 2 et que la fonction dérivée de *f* est la fonction $f' : x \mapsto 3x^2$.

Donc $f'(-2) = 12$.

Version élève de 1ère S année scolaire 2013-2014 (Adrien Fructus) :

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} 12$$

La tangente *T* est la droite de coefficient directeur 12 passant par A.

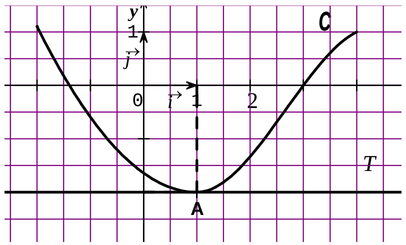
$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$
$y = 12x + 16$

À partir du $\boxed{4}$, on veillera à bien faire figurer le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sur les graphiques qu'il faut reproduire.
C'est même la première chose à faire.

Pour lire graphiquement, il n'y a rien à justifier.

$\boxed{4}$ La courbe **C** ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *f* dérivable en 1 et la droite *T* est la tangente à **C** au point A d'abscisse 1.

Reproduire le graphique ci-contre.



On commence par faire apparaître le repère.
On marque le point O, origine du repère.
On trace ensuite les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

L'observation du graphique permet de dire que :

- La tangente *T* est horizontale ;
  ou
- La tangente *T* est parallèle à l'axe des abscisses.

1°) **Lisons graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.**

$f(1) = -2$

$f'(1) = 0$ (car la tangente T est « horizontale » c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses donc a pour coefficient directeur 0).

2°) **Déterminons l'équation réduite de T.**

T a pour équation $y = -2$ (on la donne immédiatement car T est horizontale).

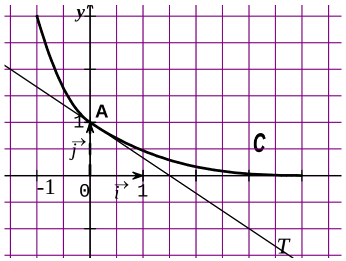
On peut retrouver cette équation en appliquant la formule du cours (méthode lourde à éviter).

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 0(x-1) - 2$

$y = -2$

$\boxed{5}$



1°) **Déterminons graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.**

$f(0) = 1$

$f'(0) = -\dfrac{2}{3}$ (car le vecteur $\vec{u}(3\,;-2)$ est un vecteur directeur de T donc T a pour coefficient directeur $-\dfrac{2}{3}$)

2°) **Déterminons l'équation réduite de T.**

On peut utiliser cette équation graphiquement ou bien en utilisant la formule du cours.

• Méthode par le calcul :

T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = -\dfrac{2}{3}x + 1$.

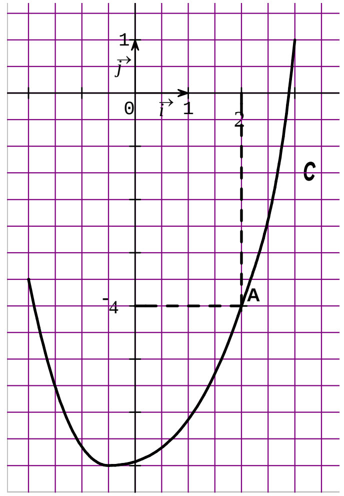
L'équation réduite de T s'écrit $y = -\dfrac{2}{3}x + 1$.

• Méthode graphique :

T a pour coefficient directeur $-\dfrac{2}{3}$ et pour ordonnée à l'origine 1.

Donc T a pour équation $y = -\dfrac{2}{3}x + 1$.

$\boxed{6}$



$f'(2) = 3$

Reproduire le graphique ci-contre.

1°) **Lisons graphiquement $f(2)$.**

$f(2) = -4$

2°) T : tangente à **C** au point A d'abscisse 2

Déterminons le coefficient directeur de T ?

T a pour coefficient directeur $f'(2) = 3$.

Traçons précisément T.

T est la droite passant par A et de coefficient directeur 3.

3°) **Déterminons l'équation réduite de T.**

On applique la formule donnant l'équation réduite d'une droite passant par un point donné et de coefficient directeur donné (inutile d'appliquer la formule donnant une équation de tangente).

$y = 3(x-2) - 4$

$y = 3x - 10$

Autre version :

1°) **Donnons $f(2)$.**

$f(2) = -4$

2°) T : tangente à **C** au point A d'abscisse 2

• **Déterminons le coefficient directeur de T.**

Le coefficient directeur de T est $f'(2) = 3$.

Autre rédaction possible :

Comme $f'(2) = 3$, alors le coefficient directeur de T est 3.

• **Traçons précisément T.**

Comme T a pour coefficient directeur 3, T admet le vecteur $\vec{u}(1\,;3)$ pour vecteur directeur.
On en déduit le tracé précis de T.

3°) **Déterminons l'équation réduite de *T*.**

On utilise directement la formule du cours.
On développe et l'on obtient ainsi l'équation réduite de la tangente.

On peut aussi traduire l'appartenance d'un point à la droite (mais c'est plus long, donc cette méthode est moins intéressante).

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$

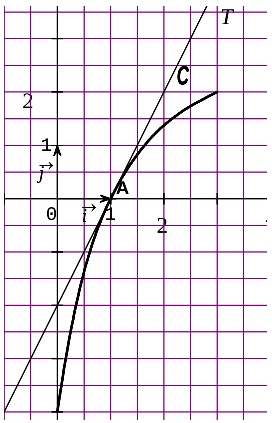
$y = 3(x-2) - 4$

$y = 3x - 6 - 4$

L'équation réduite de T s'écrit : $y = 3x - 10$.

$\boxed{7}$ La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *f* dérivable en 1.
La droite *T* est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

Reproduire le graphique ci-contre.



1°) **Déterminons graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$.**

Par lecture graphique, on obtient : $f(1) = 0$ et $f'(1) = 2$.

2°) **Déterminons l'équation réduite *T*.**

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On applique la formule du cours.

T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y = 2(x-1) + 0$.

L'équation réduite de *T* s'écrit : $y = 2x - 2$.

2$^{\text{e}}$ méthode :

On détermine l'équation réduite graphiquement.

$\boxed{8}$

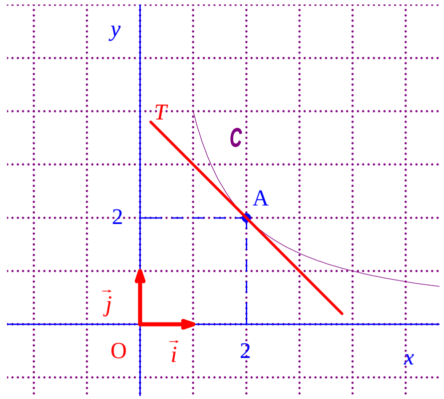
1°) **Lisons graphiquement la valeur de *f* (2).**

$f(2) = 2$

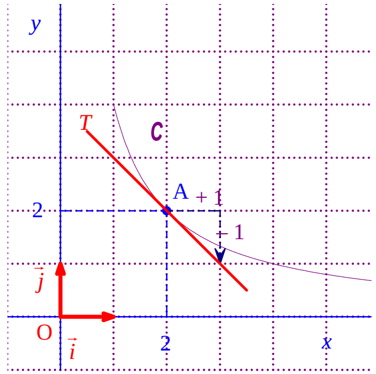
2°) **Tracé de *T***

Pour le tracé, on utilise la « méthode des carreaux ».

On doit tracer la tangente précisément et pas approximativement.



La droite *T* épouse bien la forme de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point A.



3°) **Déterminons une équation de *T*.**

1$^{\text{ère}}$ méthode : utilisation de la formule du cours

T a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ soit $y = -(x-2) + 2$ ou encore $y = -x + 4$.

L'équation réduite de *T* s'écrit : $y = -x + 4$.

2$^{\text{e}}$ méthode : graphiquement