1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur le nombre dérivé d'une fonction (2)

1 On considère la fonction $f : x \mapsto 7x^2 - 3x + 1$.

1°) Calculer $f(3)$.

2°) Soit h un réel non nul.

Exprimer $f(3+h)$ puis $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ en fonction de h sous forme simplifiée.

3°) Démontrer que la fonction f est dérivable en 3 et donner le nombre dérivé de f en 3.

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

4°) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.
Interpréter graphiquement le résultat de la question 3°).

2 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$.

1°) Calculer $f(1)$.

2°) Soit h un réel non nul différent de 2.

Exprimer $f(1+h)$ puis $f(1+h)-f(1)$ et enfin $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ en fonction de h sous forme simplifiée.

3°) Démontrer que la fonction f est dérivable en 1 et donner le nombre dérivé de f en 1.

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

4°) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.
Interpréter graphiquement le résultat de la question 3°).

3 On considère la fonction $f : x \mapsto (x+1)^3$.

La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, quel est le nombre dérivé de f en 0 ?

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

4 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Démontrer que pour tout réel h tel que $1+h \geqslant 0$ et $h \neq 0$, on a : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1}$.
En déduire que f est dérivable en 1 et donner le nombre dérivé de f en 1.

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

Le 26-11-2014

J'ai eu l'idée qu'il était peut-être bon de rédiger les exercices de manière guidée pour le 3°).

Recopier et compléter la phrase suivante :

« Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ tend vers ….. .

Comme le résultat de cette limite est finie, on en déduit que … ».

Ou

« Le quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ tend vers …. lorsque h tend vers 0 etc. ».

Rajouter dans le 2°) : « Dans la question suivante, on travaillera sur la forme simplifiée établie à la question précédente ».

Corrigé

Exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{4}$: calculs de nombres dérivés

Utiliser la règle pour tirer les traits de fraction.

Les quatre exercices portent sur des calculs de nombres dérivés « à la main » à partir de la définition.

On procède en 2 étapes :

- étape 1 : calcul du rapport de Newton (on applique le principe de séparation des calculs) ; obtention de la forme simplifiée avec « évanouissement » des *h* (calcul littéral)

- étape 2 : calcul de limite (on applique la limite comme un opérateur)

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto 7x^2 - 3x + 1$ $\quad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est une fonction polynôme du second degré.

Le but de cet exercice est de tester la dérivabilité de la fonction *f* en 3.

1°) **Calculons $f(3)$.**

$$\begin{aligned} f(3) &= 7\times3^2 - 3\times3 + 1 \\ &= 63 - 9 + 1 \\ &= 55 \end{aligned}$$

2°) $h \neq 0$

• **Exprimons $f(3+h)$ en fonction de *h*.**

$$\begin{aligned} f(3+h) &= 7\times(3+h)^2 - 3\times(3+h) + 1 \\ &= 63 + 42h + 7h^2 - 9 - 3h + 1 \\ &= 7h^2 + 39h + 55 \end{aligned}$$

• **Exprimons $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$ en fonction de *h*.**

On forme le taux de variation de *f* entre 3 et $3+h$ (rapport de Newton de *f* en 3).

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{7h^2 + 39h + \cancel{55} - \cancel{55}}{h} \\ &= \frac{7h^2 + 39h}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(7h+39)}{\cancel{h}} \\ &= 7h + 39 \end{aligned}$$

Le rapport de Newton simplifié (c'est-à-dire après simplification du *h* au dénominateur) est une somme (expression du premier degré en *h*).

3°) **Démontrons que la fonction *f* est dérivable en 3 et donnons le nombre dérivé de *f* en 3.**

Lorsque *h* tend vers 0, $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$ tend vers 39.

Le résultat de cette limite est fini donc la fonction *f* est dérivable en 3 et le nombre dérivé de la fonction *f* en 3 est égal à 39.

On vérifie ce résultat en utilisant la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.

Sur calculatrice TI, on utilise la fonctionnalité permettant de calculer le nombre dérivé d'une fonction.

$\text{nDeriv}\left(7X^2 - 3X + 1, X, 3\right)$

fonction variable nombre en lequel on cherche le nombre dérivé

ou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\left(7X^2 - 3X + 1\right)\Big|_{X=3}$$

4°) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère.

Interprétons graphiquement ce résultat.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 3 a pour coefficient directeur 39.

Sur calculatrice, on peut tracer la courbe représentative de la fonction *f* et tracer la tangente.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3}}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

f est une fonction rationnelle (on peut même dire que c'est une fonction homographique c'est-à-dire le quotient de deux fonctions affines).

Le but de cet exercice est de tester la dérivabilité de la fonction *f* en 1.

1°) **Calculons $f(1)$.**

$$f(1) = -\frac{1}{2}$$

2°) $h \neq 2$ et $h \neq 0$

• **Exprimons $f(1+h)$ en fonction de *h*.**

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \frac{1}{1+h-3} \\ &= \frac{1}{h-2} \end{aligned}$$

• **Exprimons $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ en fonction de *h*.**

On forme le rapport de Newton de *f* en 1.

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{h-2}+\dfrac{1}{2}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{2+h-2}{2(h-2)}}{h} \qquad \text{(égalité : } \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\text{)} \\ &= \frac{\dfrac{\cancel{h}}{2(h-2)}}{\cancel{h}} \\ &= \frac{1}{2(h-2)} \end{aligned}$$

Le rapport de Newton simplifié est un quotient.

Autre méthode – meilleure : On applique le principe de séparation des calculs.

$$\begin{aligned} f(1+h)-f(1) &= \frac{1}{h-2}+\frac{1}{2} \\ &= \frac{2+h-2}{2(h-2)} \\ &= \frac{h}{2(h-2)} \end{aligned}$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{\cancel{h}}{2(h-2)}}{\cancel{h}} = \frac{1}{2(h-2)}$$ (il ne sert à rien de développer le dénominateur)

3°) **Démontrons que la fonction *f* est dérivable en 3 et donnons le nombre dérivé de *f* en 3.**

Lorsque *h* tend vers 0, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ tend vers $-\dfrac{1}{4}$.

Le résultat de cette limite est fini donc la fonction *f* est dérivable en 1 et le nombre dérivé de la fonction *f* en 1 est égal à $-\dfrac{1}{4}$.

On vérifie ce résultat en utilisant la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.

Sur calculatrice TI, on obtient l'affichage suivant : – 0,2500000625.
Seules les deux premières décimales sont justes (on a un résultat approché car on est un peu aux limites d'une calculatrice qui ne fait pas de calcul formel).

4°) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère.

Interprétons graphiquement ce résultat.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{4}$.

Sur calculatrice, on peut tracer la courbe représentative de la fonction *f* et tracer la tangente.

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto (x+1)^3}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

f est une fonction polynôme du troisième degré.

Étudions la dérivabilité de la fonction *f* en 0.

$$f(0) = 1$$

$$h \neq 0$$

$$\begin{aligned} f(0+h) &= (h+1)^3 \\ &= h^3+3h^2+3h+1 \qquad \text{[on utilise l'identité remarquable } (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\text{]} \end{aligned}$$

On forme le taux de variation de *f* entre 0 et *h*.

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{h^3+3h^2+3h\cancel{+1}\cancel{-1}}{h} \\ &= h^2+3h+3 \end{aligned}$$

On ne peut pas aller plus loin (même avec le second degré tel que discriminant) ; ça n'est pas le but.

Le rapport de Newton simplifié est une somme (expression du second degré).

Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend vers 3.

Le résultat de cette limite est fini donc la fonction f est dérivable en 0 et le nombre dérivé de la fonction f en 0 est égal à 3.

On vérifie ce résultat en utilisant la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 3.

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \sqrt{x}}$ $\qquad \mathscr{D}_f = [0 ; +\infty[$

Tirer les traits de fraction à la règle.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\frac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\frac{\cancel{1}+h-\cancel{1}}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$$

Ce qui est fait ici va à l'encontre de ce qui est dit habituellement : méthode obsolète qui consiste à « remonter » les racines carrées au dénominateur.

On utilise la quantité conjuguée du dénominateur. En général, c'est plutôt le contraire que l'on fait : quand on a une racine carrée au dénominateur, on essaie plutôt d'avoir une racine carrée au numérateur.
On complexifie l'expression mais en fait on simplifie le problème.

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$$

$$f'(1)=\frac{1}{2}$$

On vérifie ce résultat en utilisant la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.

Solution détaillée :

$\boldsymbol{f : x \mapsto \sqrt{x}}$ $\qquad \mathscr{D}_f = [0 ; +\infty[$

• Démontrons que pour tout réel h tel que $1+h \geqslant 0$ et $h \neq 0$, on a : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1}$.

$f(1)=1$

$h \neq 0, \quad h \geqslant -1$

$f(1+h)=\sqrt{1+h}$

On forme le rapport de Newton de f en 1.

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\\&=\frac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}\\&=\frac{\cancel{1}+h-\cancel{1}}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} \quad \text{(on applique l'identité remarquable } (a-b)(a+b)=a^2-b^2\text{)}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}\end{aligned}$$

On observera que l'on a utilisé la quantité conjuguée.
On installe exceptionnellement la racine carrée « en bas ».

• Déduisons-en que f est dérivable en 1 et donnons le nombre dérivé de f en 1.

On détermine la limite de $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ lorsque h tend vers 0 par rapport au résultat que l'on vient de trouver.

Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{1}{2}$ (on remplace h par 0).

Le résultat de cette limite est fini donc la fonction f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de la fonction f en 1 est égal à $\dfrac{1}{2}$.

On vérifie ce résultat en utilisant la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.