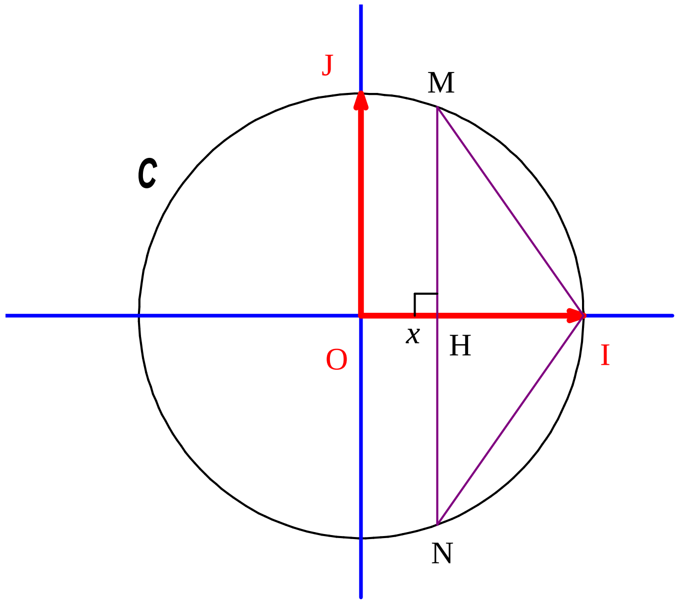
Problème d'approfondissement

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Soit I, J, K les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (0 ; – 1).

On considère deux points M et N du cercle $\mathcal{C}$ tels que (MN) ⊥ (OI).

On note H le point d'intersection des droites (OI) et (MN). On pose $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{i}$.



On ne demande pas de refaire la figure.

Si $x = 1$, pas de triangle.

Si $x = -1$, triangle aplati.

Partie 1

On note $f\left(x\right)$ l'aire du triangle MNI en fonction de x $\left(x \in \left[-1\,;1\right]\right)$.

1°) Exprimer $f\left(x\right)$ en fonction de x.

2°) Calculer $f'\left(x\right)$ pour $x \in \left]-1\,;1\right[$ (on ne demande pas de justifier que f est dérivable sur $\left]-1\,;1\right[$).

On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.

3°) Démontrer que la fonction f est dérivable en 1 (à gauche) et que $f'\left(1\right) = 0$.

Démontrer que f n'est pas dérivable (à droite) en – 1.

4°) Dresser un tableau comprenant l'étude du signe $f'\left(x\right)$ et les variations de f sur $\left[-1\,;1\right]$.

5°) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MNI est elle maximale ? Quelle est cette aire ? Quelle est alors la nature du triangle MNI ?

Partie 2

1°) Vérifier que l'aire du triangle IJK est égale à 1.
2°) Démontrer qu'il existe un réel x_0 autre que 0 pour lequel l'aire du triangle MNI est égale à 1.
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de x_0.
Faire une figure en traçant le triangle MNI correspondant.
3°) Dans cette question, on se propose de déterminer la valeur exacte de x_0.
a) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ est équivalente dans l'intervalle $[-1\,;1]$ à l'équation $x^4-2x^3+2x=0$.
b) On considère l'équation $x^3-2x^2+2=0$ (E).
Démontrer que (E) est équivalente à l'équation $\left(x-\frac{2}{3}\right)^3-\frac{4}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{38}{27}=0$.
En déduire à l'aide de la formule de Cardan donnée en appendice que $x_0=\dfrac{2+\sqrt[3]{-19+\sqrt{297}}+\sqrt[3]{-19-\sqrt{297}}}{3}$,
ce que l'on peut aussi écrire $x_0=\dfrac{2+\sqrt[3]{\sqrt{297}-19}-\sqrt[3]{\sqrt{297}+19}}{3}$ (écriture qui présente l'avantage de ne pas avoir de racine cubique de nombre négatif).

Appendice

Formule de Cardan

Soit p et q deux réels.

Si $4p^3+27q^2>0$, alors l'équation $x^3+px+q=0$ admet une unique racine réelle α donnée par la formule

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$