TS1

Contrôle du vendredi 14 novembre 2014 (4 heures)

• Écrire très lisiblement, au stylo à plume, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

• Ne rien écrire, ne rien surligner sur l'énoncé.

• Le barème est donné sur 40.

I. (6 points)

Cet exercice est un QCM composé de 6 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Faire un tableau sur la copie en complétant avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2-\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$ est donnée par :

a. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$ b. $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$ c. $f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$

2°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $2-\sqrt{1+\mathrm{e}^x}>0$ est :

a. $]-\infty\,;\ln 3[$ b. $]\ln 3\,;+\infty[$ c. $]0\,;\ln 3[$

3°) La fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ est la dérivée de la fonction :

a. $F : x \mapsto \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{2}$ b. $F : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$ c. $F : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$

4°) L'expression $\dfrac{-2\mathrm{e}^2\times 3\mathrm{e}^4}{\left(2\mathrm{e}^2\right)^2-3\mathrm{e}^4}$ est égale à :

a. $\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$ b. $-6\mathrm{e}^2$ c. $-5\mathrm{e}^2$

5°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^n}$ où n est un entier naturel est donnée par :

a. $f'(x)=-\dfrac{2n\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{n+1}}$ b. $f'(x)=-\dfrac{2n\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{n-1}}$ c. $f'(x)=\dfrac{2n}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{n+1}}$

6°) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^{2x}\times\left(\mathrm{e}^x-1\right)^3+\mathrm{e}^{3x}\times\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2=0$ sont :

a. 0 et ln 2 b. 0 c. 0 et $\ln\dfrac{1}{2}$

II. (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x+1$ si $x\leqslant 2$, $f(x)=x-5$ si $2<x<4$, $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+7$ si $x\geqslant 4$.
Tracer au brouillon la représentation graphique de la fonction f.

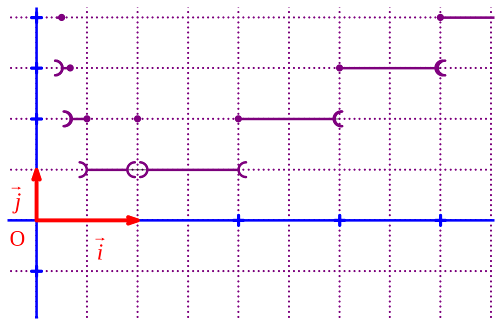
1°) Répondre sans justifier.
La fonction f est-elle continue sur l'intervalle $]-\infty\,;4[$? La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2°) Résoudre algébriquement l'équation $f(x)=3$ (E).

III. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{E}(x)+\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

On donne ci-dessous une partie de la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}^*$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1°) Démontrer que si $x>1$ alors $f(x)=\mathrm{E}(x)$ et que si $0<x<1$, alors $f(x)=\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2°) Soit n un entier naturel non nul fixé.
Donner la valeur de f sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{n+1}\,;\dfrac{1}{n}\right]$.

IV. (6 points)

Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.
On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0=1$ et par la relation de récurrence $z_{n+1}=\lambda z_n+1$ pour tout entier naturel n.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1°) Exprimer z_1, z_2, z_3 en fonction de λ.

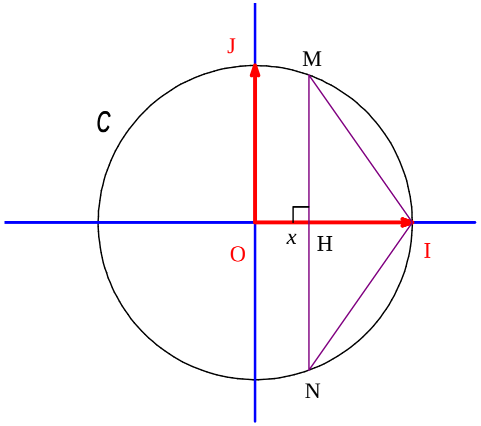
2°) Déterminer le(s) complexe(s) λ tel(s) que $z_2=0$.

Dans la suite, on admet sans démonstration que l'on a $z_n = \dfrac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}$ pour tout entier naturel *n*.

3°) Dans cette question, on prend $\lambda = 1+\mathrm{i}$.
Calculer $(1+\mathrm{i})^4$.
Démontrer que tous les points de la forme M_{4k+3} où *k* est un entier naturel appartiennent à l'axe des imaginaires purs.

V. (10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
Soit I et J les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1).
On considère deux points M et N du cercle $\mathcal{C}$ tels que (MN) ⊥ (OI).
On note H le point d'intersection des droites (OI) et (MN).
On pose $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{i}$.



On ne demande pas de refaire la figure sur la copie.

1°) Calculer l'aire du triangle MNI en fonction de *x*.
2°) On considère la fonction $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$ définie sur l'intervalle $[-1;1]$.
Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-1;1[$ (on ne demande pas de justifier que *f* est dérivable sur $]-1;1[$).
On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.
3°) Dresser un tableau comprenant l'étude du signe $f'(x)$ et les variations de *f* sur $[-1;1]$.
On admettra sans démonstration que la fonction *f* est dérivable en 1 et que $f'(1)=0$ mais que *f* n'est pas dérivable en – 1.
4°) Pour quelle valeur de *x* l'aire du triangle MNI est-elle maximale ? Quelle est cette aire ? Quelle est alors la nature du triangle MNI ?
5°) Justifier l'existence d'un réel x_0 autre que 0 pour lequel l'aire du triangle MNI est égale à 1.
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de x_0.

VI. (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 5u_n + 3\times 2^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) En considérant la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 2^n$, démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a :
$u_n = 3\times 5^n - 2^n$.
2°) Déterminer le reste de la division euclidienne de u_{2014} par 6. Expliquer la démarche.

VII. (4 points)

Les codes secrets des cartes bancaires sont formés de quatre chiffres pris de 0 à 9.
Pierre n'a pas noté celui de sa carte bancaire dans son agenda, mais comme il a peur de l'oublier, il a quand même noté la forme « cryptée » de son code secret de façon que son code secret ne soit pas découvert si son agenda était perdu.

1°) Pierre réalise toujours son cryptage de la façon suivante : il remplace chaque chiffre *n* de son code secret par le chiffre *p*, appelé forme cryptée de *n*, qui est le reste de la division euclidienne de $3n+4$ par 10.
Pierre a inscrit 6917 dans son agenda qui est la forme cryptée de son code secret.
Quel est son véritable code secret ? Expliquer la démarche.
2°) Pierre a fait des émules. Son ami Jacques utilise le reste de la division euclidienne de $a\times n+b$ par 10 mais en prenant deux autres valeurs de *a* et *b* parmi les chiffres de 0 à 9.
Pierre prétend pouvoir déterminer la formule de Jacques (c'est-à-dire trouver les nombres *a* et *b*) car ce dernier lui a avoué les formes cryptées de deux chiffres :
- La forme cryptée du chiffre 3 est le chiffre 3 ;
- La forme cryptée du chiffre 4 est le chiffre 2.
Établir que *a* et *b* vérifient simultanément $3a+b\equiv 3$ (mod. 10) et $4a+b\equiv 2$ (mod. 10).
En déduire les valeurs de *a* et *b*.

Consignes orales

- Demander aux élèves de ne pas mettre l'énoncé dans la copie.
- Demander aux élèves de faire un « cartouche » de présentation sur la première page avec le numéro des exercices.

Corrigé du contrôle du 14-11-2014

I.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	c	a	b	b	a	c

1°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2-\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$ est donnée par $f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$.

2°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $2-\sqrt{1+\mathrm{e}^x}>0$ est $\left]-\infty\,;\ln 3\right[$.

3°) La fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ est la dérivée de la fonction $F : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = 1\times\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x$ (dérivée d'un produit)

$= (1+x-1\times)\mathrm{e}^x$

$= x\mathrm{e}^x$

$= f(x)$

Attention à bien lire la question. On cherche la fonction *F* dont la dérivée est égale à *f*.

4°) L'expression $\dfrac{-2\mathrm{e}^2\times 3\mathrm{e}^4}{\left(2\mathrm{e}^2\right)^2-3\mathrm{e}^4}$ est égale à $-6\mathrm{e}^2$.

Beaucoup d'élèves se sont trompés et ont voulu répondre $6\mathrm{e}^2$.
Ils croyaient qu'il y avait une erreur dans l'énoncé.

5°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^n}$ où *n* est un entier naturel est donnée par $f'(x)=-\dfrac{2n\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{n+1}}$.

6°) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^{2x}\times\left(\mathrm{e}^x-1\right)^3+\mathrm{e}^{3x}\times\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2=0$ sont 0 et $\ln\dfrac{1}{2}$.

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x}\times\left(\mathrm{e}^x-1\right)^3+\mathrm{e}^{3x}\times\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2=0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow e^{2x}\times\left(e^x-1\right)^2\left(e^x-1+e^x\right)=0$

$\Leftrightarrow e^{2x}\times\left(e^x-1\right)^2\left(2e^x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow e^{2x}=0$ (impossible) ou $\left(e^x-1\right)^2=0$ ou $2e^x-1=0$

$\Leftrightarrow e^x=1$ ou $e^x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^x=0$ ou $x=\ln\frac{1}{2}$

II.

La fonction *f* est une fonction affine par intervalles.

1°) La fonction *f* est continue sur l'intervalle $\left]-\infty\,;4\right[$ mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (discontinuité en 4).

2°) **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=3$ (E).**

(E) $\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+1=3\\ x\leqslant 2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-5=3\\ 2<x<4\end{cases}$ ou $\begin{cases}-\frac{1}{2}x+7=3\\ x\geqslant 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ x\leqslant 2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=8\\ 2<x<4\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=8\\ x\geqslant 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=8$

Soit *S* l'ensemble des solutions de l'équation (E).

$$S=\{-1\,;8\}$$

III.

$f : x\mapsto E(x)+E\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$

On peut remarquer d'emblée que *f* est à valeur dans $\mathbb{Z}$ (c'est évident d'après l'expression de *f*).

1°) **Démontrer que si $x>1$ alors $f(x)=E(x)$ et que si $0<x<1$, alors $f(x)=E\left(\frac{1}{x}\right)$.**

• Si $x>1$ alors $0\leqslant\frac{1}{x}<1$

D'où $E\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Donc $f(x)=E(x)$.

• Si $0<x<1$, alors $0\leqslant x<1$ d'où $E(x)=0$.

Donc $f(x)=E\left(\frac{1}{x}\right)$.

2°) $n\in\mathbb{N}^*$

Donnons la valeur de *f* sur l'intervalle $\left]\frac{1}{n+1}\,;\frac{1}{n}\right]$.

Soit $x\in\left]\frac{1}{n+1}\,;\frac{1}{n}\right]$ fixé.

On a : $\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}$.

Donc, par passage à l'inverse, on obtient $n+1>\frac{1}{x}\geqslant n$ (car les inégalités ne comportent que des réels strictement positifs).

D'après cette dernière inégalité, $E\left(\frac{1}{x}\right)=n$.

On en déduit que $f(x)=n$.

V.

Thème de l'exercice : optimisation et résolution approchée d'une équation

1°) **Calculons l'aire du triangle MNI en fonction de *x*.**

• Calculons MN.

Le triangle MNI est isocèle en I (en effet, la figure possède un axe de symétrie, à savoir l'axe des abscisses).
Par suite H est le milieu de [MN].

On a donc $MN=2\times MH$.

De plus, dans le triangle OMH rectangle en H, on a : $OM=1$ et $OH=x$.

D'après le théorème de Pythagore, $OM^2=OH^2+MH^2$.

D'où $MH^2=OM^2-OH^2$ soit $MH^2=1-x^2$ (on utilise que $OH=|x|$).

Par suite $MH=\sqrt{1-x^2}$ $\left(MH\geqslant 0 \text{ car MH est une longueur}\right)$.

D'où $\text{MN} = 2\times\text{MH}$
$= 2\sqrt{1-x^2}$

• Calculons MI en fonction de x.

Il faut distinguer deux cas.

1^er cas : $0 \leqslant x \leqslant 1$

Les points O, H, I sont alignés dans cet ordre.
On a : $\text{OH} = x$ et $\text{OI} = 1$.
D'où $\text{HI} = \text{OI} - \text{OH} = 1 - x$.

2^e cas : $-1 \leqslant x \leqslant 0$

Les points H, O, I sont alignés dans cet ordre.
On a : $\text{OH} = -x$ et $\text{OI} = 1$.
D'où $\text{IH} = \text{HO} + \text{OI} = 1 - x$.

• Calculons l'aire de MNI.

$$\mathcal{A}_{\text{MNI}} = \frac{\text{MN}\times\text{IH}}{2}$$
$$= \text{MH}\times\text{IH}$$
$$= \sqrt{1-x^2}\times(1-x)$$
$$= (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

2°) $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$ définie sur l'intervalle $[-1\,;1]$

Calculons $f'(x)$.

On admet que f est dérivable sur $]-1\,;1[$.

$$\forall x \in]-1\,;1[\quad f'(x) = -1\times\sqrt{1-x^2} + (1-x)\times\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\sqrt{1-x^2} - \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{-1+x^2-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Étudions les variations de f.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
Signe de $2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	
Signe de $\sqrt{1-x^2}$	0	$+$		$+$	0
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0
Variations de f	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

Attention dans le tableau de variations à bien placer tous les 0.

On vérifie les variations de la fonction f en traçant la courbe représentative sur l'écran de la calculatrice.

4°) **Déterminons pour quelle valeur de x l'aire du triangle MNI est maximale.**

On a : $f(x) = \mathcal{A}_{\text{MNI}}$.

f atteint un maximum en $-\frac{1}{2}$ qui vaut $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1,29...$

Ainsi l'aire du triangle MNI est maximale pour $x = -\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Déterminons la nature du triangle MNI dans ce cas.

On répond par rapport à la valeur $x = -\frac{1}{2}$ qui nous donne la position de I dans ce cas. Le mieux est de faire un graphique dans ce cas. On peut donner une réponse plus géométrique dans ce cas en observant que OMI' et ONI' sont des triangles équilatéraux.

Nous savons déjà que MNI est isocèle en I.

Grâce à la question 1°), $\text{MN} = 2\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{3}$.

De plus, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle MHI, on obtient : $\text{MI} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$.

On a donc $MN = MI = NI = \sqrt{3}$.

On en déduit que le triangle MNI est équilatéral.

5°)

● Justifions l'existence d'un réel x_0 autre que 0 pour lequel l'aire du triangle MNI est égale à 1.

On s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$ (E) avec $x \in [-1\,;1]$.

L'équation s'écrit : $(1-x)\sqrt{1-x^2} = 1$.

Cette équation ne peut être résolue de manière exacte.
On la résout de manière approchée.

Dans le tableau de variations de *f*, on peut placer 1 sur les flèches de variations.

Intéressons-nous à l'intervalle $I = \left[-1\,;-\frac{1}{2}\right]$.
Sur cet intervalle, *f* est continue et strictement croissante.

De plus $f(-1) = 0$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1{,}29...$

D'où $f(-1) < 1 < f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution dans I que l'on nommera x_0.

De plus dans l'intervalle $J = \left[-\frac{1}{2};1\right]$, (E) admet une seule solution qui est 0.

Soit S l'ensemble de solutions de l'équation (E).

$S = \{x_0\,;0\}$

● Déterminons alors la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_0.

Grâce à la calculatrice, on obtient :

$f(-0{,}840) = 0{,}998...$ donc $f(-0{,}840) < 1$.
$f(-0{,}839) = 1{,}0007...$ donc $f(-0{,}839) > 1$.

D'où $-0{,}840 < x_0 < -0{,}839$.

La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_0 est donc – 0,840.

Remarque :

En utilisant les formule de Cardan (hors programme !), on peut établir que la valeur exacte de x_0 est égale à :
$\dfrac{2+\sqrt[3]{\sqrt{297}-19}-\sqrt[3]{\sqrt{297}+19}}{3}$.

VI.

$$(z_n)\begin{cases} z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \lambda z_n + 1 \end{cases}$$

1°) **Exprimons z_1, z_2, z_3 en fonction de λ.**

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda z_0 + 1 \\ &= \lambda \times 1 + 1 \\ &= \lambda + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_2 &= \lambda z_1 + 1 \\ &= \lambda(\lambda+1)+1 \\ &= \lambda^2+\lambda+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_3 &= \lambda z_2 + 1 \\ &= \lambda(\lambda^2+\lambda+1)+1 \\ &= \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 \end{aligned}$$

2°) **Déterminons les complexes λ tels que $z_2 = 0$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow \lambda^2+\lambda+1 = 0$

Considérons le polynôme $\lambda^2+\lambda+1$.

Son discriminant vaut $\Delta = -3$.

$\Delta < 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes, complexes conjuguées : $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

(1) $\Leftrightarrow$ $\lambda = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $\lambda = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

3°) $\lambda = 1+i$

Calculons $(1+i)^4$.

$(1+i)^4 = \left[(1+i)^2\right]^2 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = -4$

Calculons z_{4k+1}.

$z_{4k+1}=\lambda^{4k+4}-1$

$$=\frac{\left[(1+\mathrm{i})^4\right]^{k+1}-1}{(1+\mathrm{i})-1}$$

$$=\frac{(-4)^{k+1}-1}{\mathrm{i}}$$

$$=-\mathrm{i}\left[(-4)^{k+1}-1\right]$$

$-(-4)^{k+1}+1$ est un réel, donc on a $\mathrm{Re}(z_{4k+3})=0$.

D'où tous les points de la forme M_{4k+3} où k est un entier naturel appartiennent à l'axe des imaginaires purs.

Voici un programme pour calculatrice TI permettant d'afficher tous les termes de z_0 à z_n.

: Prompt N
: 1 → Z
: Disp 0, Z
: Pause
: For (I,1,N)
: (1 + *i*)* Z + 1 → Z (on utilise le *i* des complexes de la calculatrice)
: Disp I, Z
: Pause
: End
On obtient :

$z_0=1$
$z_1=2-\mathrm{i}$
$z_2=2-3\mathrm{i}$
$z_3=-5\mathrm{i}$
$z_4=6-5\mathrm{i}$
$z_5=12+\mathrm{i}$
$z_6=12+13\mathrm{i}$
$z_7=25\mathrm{i}$
$z_8=-24+25\mathrm{i}$
$z_9=-48+\mathrm{i}$
$z_{10}=-48-47\mathrm{i}$
$z_{11}=-95\mathrm{i}$
$z_{12}=96-95\mathrm{i}$
$z_{13}=192+\mathrm{i}$
$z_{14}=192+193\mathrm{i}$
$z_{15}=385\mathrm{i}$
$z_{16}=-384+385\mathrm{i}$
$z_{17}=-768+\mathrm{i}$
$z_{18}=-768-767\mathrm{i}$
$z_{19}=-1535\mathrm{i}$

VI.

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=5u_n+3\times 2^n \end{cases}$$

1°)

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n+2^n$

Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=3\times 5-2^n$.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}&=u_{n+1}+2^{n+1}\\&=5u_n+3\times 2^n+2^{n+1}\\&=5u_n+3\times 2^n+2\times 2^n\\&=5u_n+5\times 2^n\\&=5\left(u_n+2^n\right)\\&=5v_n\end{aligned}$$

(v_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison 5.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=3\times 5^n$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=v_n-2$
$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=3\times 5^n-2^n$

2°) **Déterminons le reste de la division euclidienne de u_{2014} par 6.**

On a : $u_{2014}=3\times 5^{2014}-2^{2014}$.

On a : $5\equiv -1$ (mod. 6) donc $5^{2014}\equiv 1$ (mod. 6).
Par suite, $3\times 5^{2014}\equiv 3$ (mod. 6).

$2^0\equiv 1$ (mod. 6)
$2^1\equiv 2$ (mod. 6)
$2^2\equiv 4$ (mod. 6)
$2^3\equiv 2$ (mod. 6)

On peut démontrer par récurrence que :

$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad 2^{2k}\equiv 4$ (mod. 6)
$\forall k\in\mathbb{N}\quad 2^{2k+1}\equiv 2$ (mod. 6)

$2^{2014}\equiv 4$ (mod. 6) (2)

(1) et (2) donnent $u_{2014}\equiv -1$ (mod. 6) d'où $u_{2014}\equiv 5$ (mod. 6).

On en déduit que le reste de la division euclidienne de u_{2014} par 6 est 5.

VII.

Thème de l'exercice : codage affine

1°) **Déterminons le code secret de Pierre.**

Le mieux est de faire un tableau de correspondance.
On raisonne modulo 10.

Table de cryptage :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	4	7	0	3	6	9	2	5	8	1

Pour établir rapidement ce tableau de correspondance sans se tromper, on peut utiliser la calculatrice.

1ère méthode :

On utilise les suites.

On met la calculatrice en mode suite.

$u(n) = 3n + 4 - 10 * \text{partEnt}((3n+4)/10)$

On regarde le tableau de valeurs pour n entre 0 et 9.

2e méthode :

On utilise les listes.

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{stats}}$ (listes)

[On va utiliser les listes.]

Au départ, on a l'écran normal sur calculatrice.
① **Liste L1**

Dans la liste L1, on va mettre les valeurs de n.

Suite(K, K, 0, 9) $\rightarrow$ L1 (calculatrice en anglais)

Seq(K, K, 0, 0) $\rightarrow$ L1 (calculatrice en français)

② **Liste L2**

Dans la liste L2, on va mettre les restes de la division euclidienne de $3n+4$ par 10.

On utilise la partie entière.
L'égalité de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b non nul s'écrit $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

On a donc : $r = a - bq$.

Or $q = \mathrm{E}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

Par suite, $r = a - \mathrm{E}\left(\dfrac{a}{b}\right)b$.

Suite($3 * \text{K} + 4 - \text{partEnt}((3 * \text{K} + 4)/10) * 10$, K, 0, 9) $\rightarrow$ L2

On retourne dans les listes en vertical.

$\boxed{\text{stats}}$ EDIT pour la liste

L1 chiffres	L2 restes
0	
1	
2	
3	

Le véritable code secret de Pierre est 4591.

2°)

Établissons que a et b vérifient simultanément $3a + b \equiv 3$ (mod. 10) et $4a + b \equiv 2$ (mod. 10).

La forme cryptée du chiffre 3 est le chiffre 3 donc le reste de la division euclidienne de $3n+3$ par 10 est égal à 3.
Par suite, $3a + b \equiv 3$ (mod. 10).

La forme cryptée du chiffre 4 est le chiffre 2 donc le reste de la division euclidienne de $4a+b$ par 10 est égal à 2.
Par suite, $4a + b \equiv 2$ (mod. 10).

Déduisons-en les valeurs de a et b.

Par soustraction membre à membre, on obtient : $a \equiv -1$ (mod. 10) d'où $a \equiv 9$ (mod. 10).
Or a est un entier naturel compris entre 0 et 9 au sens large. Par conséquent, $a = 9$.

En remplaçant, on obtient $3 \times 9 + b \equiv 3$ (mod. 10) d'où $b \equiv -24$ (mod. 10) soit $b \equiv 6$ (mod. 10).
Or b est un entier naturel compris entre 0 et 9 au sens large. Par conséquent, $b = 6$.