TS1

Contrôle du vendredi 4 novembre 2014 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………….

Note : ….. / 20

• Écrire très lisiblement, au stylo à plume, sans ratures et sans utiliser d'abréviations.

• Ne rien écrire d'autre que ce qui est demandé, ne rien surligner sur l'énoncé.

I. (3 points)

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie et dérivable sur un ensemble I.
Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f'(x)$ dans chaque cas (calculs au brouillon).

1°)	$f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^5$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$f'(x)=$ ………………………………………………………
2°)	$f(x)=x^3(x-1)^4$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=$ ………………………………………………………
3°)	$f(x)=\dfrac{1}{(2x-4)^8}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$f'(x)=$ ………………………………………………………

II. (7 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3-3x^2+4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ en donnant le résultat sous forme factorisée (justifier auparavant la dérivabilité de *f* sur $\mathbb{R}$).

………

………

………

………

………

2°) Compléter le tableau récapitulatif suivant donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction *f*.
Calculer les extremums (valeurs exactes) au brouillon et compléter le tableau.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de	
Signe de	
Signe de $f'(x)$	
Variations de *f*	

3°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [– 1 ; 0].
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de α (justifier).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (1 point)

On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x^2 - 1$ et $g : x \mapsto \sin x$.
On note h la composée de g suivie de f (autrement dit $h = f \circ g$).
Démontrer que pour tout réel x on a : $h(x) = -\cos 2x$.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

IV. (2 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ si $x < 1$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \geqslant 1$.
Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.
Tracer au brouillon la courbe représentative de la fonction f et dire sans justifier si la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Donner l'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

V. (2 points)

Soit x un réel quelconque tel que $-\dfrac{5}{2} < x \leqslant -2$. Déterminer $\mathrm{E}\left(\left|\, 2x+1 \right|\right)$ (justifier avec soin).

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

VI. (5 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A, B, C les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$, i, $-1+\mathrm{i}$.
À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + \mathrm{i}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des points M' lorsque M décrit le segment [AB].

1°) Soit M un point quelconque de [AB]. On note z l'affixe de M et on pose $z = \mathrm{i}\lambda$ où λ est un réel.

a) À quel intervalle appartient λ ?

$$\lambda \in [\ldots\ldots ; \ldots\ldots]$$

b) Exprimer les coordonnées cartésiennes $(x' ; y')$ de M' en fonction de λ sans détailler les calculs.

$x' = \ldots\ldots\ldots$ et $y' = \ldots\ldots\ldots$

2°) En déduire que M' appartient à une droite (à déterminer).

On a ………………….. donc $\mathrm{M}' \in (\ldots\ldots\ldots)$.

3°) Compléter :

Lorsque M décrit le segment [AB],

λ décrit l'intervalle …………………… ;

$-\lambda^2$ décrit l'intervalle …………………… .

4°) En déduire l'ensemble E des points M' lorsque M décrit le segment [AB].

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 4-11-2014

I.

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie et dérivable sur un ensemble I.
Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f'(x)$ dans chaque cas (calculs au brouillon).

1°)	$f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^5$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$f'(x)=10\dfrac{(x-1)^4}{(x+1)^6}$
2°)	$f(x)=x^3(x-1)^4$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=x^2\times(x-1)^3(7x-3)$
3°)	$f(x)=\dfrac{1}{(2x-4)^8}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$f'(x)=-\dfrac{16}{(2x-4)^9}$

L'application Symbolic ne marche pas !

1°)

$$f'(x)=5\times\frac{2}{(x+1)^2}\times\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$$

$$=10\frac{(x-1)^4}{(x+1)^6}$$

Pour la « sous-dérivée », on applique la formule de dérivation d'une fonction homographique.

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

2°)

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=3x^2\times(x-1)^4+x^3\times4(x-1)^3$

$$=x^2\times(x-1)^3(3x-3+4x)$$

$$=x^2\times(x-1)^3(7x-3)$$

II.

On considère la fonction $f: x\mapsto 2x^3-3x^2+4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ en donnant le résultat sous forme factorisée (justifier auparavant la dérivabilité de *f* sur $\mathbb{R}$).

f est une fonction polynôme donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=6x^2-6x$

$$=6x(x-1)$$

2°) Compléter le tableau récapitulatif suivant donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction *f*.
Calculer les extremums (valeurs exactes) au brouillon et compléter le tableau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $6x$		–	0	+		+	
Signe de $x-1$		–		–	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de *f*		↗	4	↘	3	↗	

3°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [– 1 ; 0].
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de α (justifier).

La fonction *f* est une fonction polynôme.
Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et par restriction, elle est continue sur l'intervalle [– 1 ; 0].
De plus, d'après le tableau de variation, *f* est strictement croissante sur l'intervalle [– 1 ; 0].

Or $f(-1)=-1$ et $f(0)=4$.
D'où $f(-1)<0<f(0)$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans [– 1 ; 0].

Indication à ne pas écrire sur la copie :

Pour trouver un encadrement de α, on utilise la calculatrice ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$). On obtient : $\alpha = -0,910820...$.
Cela nous permet de dire que $-0,911 < \alpha < -0,910$.
On démontre ensuite cet encadrement de manière rigoureuse selon la démarche détaillée ci-après.

Avec la calculatrice, on trouve $f(-0,911) = -0,00187906...$ et $f(-0,910) = 0,008558$.

On a donc $f(-0,911) < 0$ et $f(-0,910) > 0$.

Par conséquent, comme f est strictement croissante sur $[-1\,;0]$, $-0,911 < \alpha < -0,910$ d'où $-0,911 \leqslant \alpha < -0,910$.

Cette dernière inégalité permet d'affirmer que $-0,911$ est l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de α.

Attention, on se garde bien d'écrire $\alpha = -0,911$.

III.

On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x^2 - 1$ et $g : x \mapsto \sin x$.
On note h la composée de g suivie de f (autrement dit $h = f \circ g$).
Démontrer que pour tout réel x on a : $h(x) = -\cos 2x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = f\left[g(x)\right]$$

$$= f(X) \quad \text{avec } X = g(x)$$

$$= 2(\sin x)^2 - 1$$

$$= 2\sin^2 x - 1$$

$$= -\left(1 - 2\sin^2 x\right)$$

$$= -\cos 2x$$

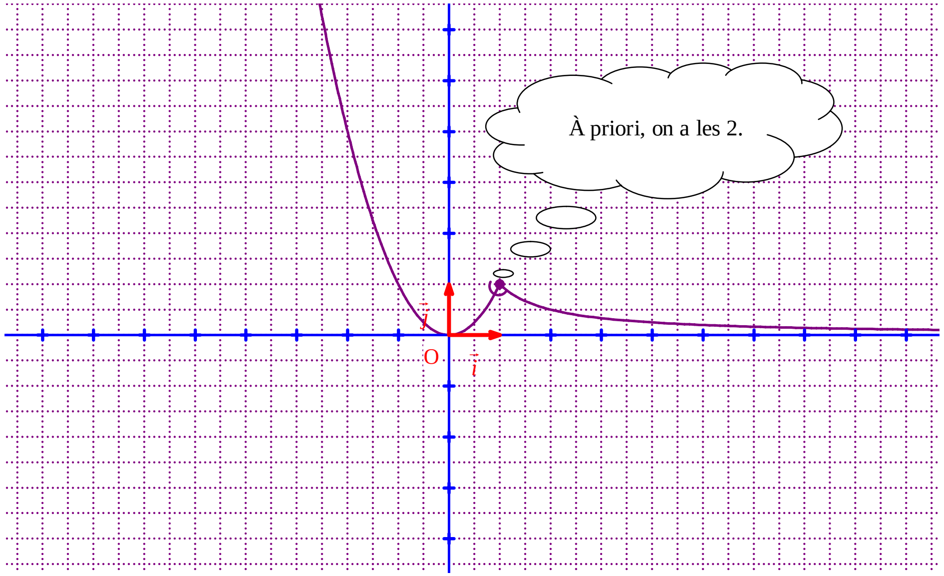
IV.

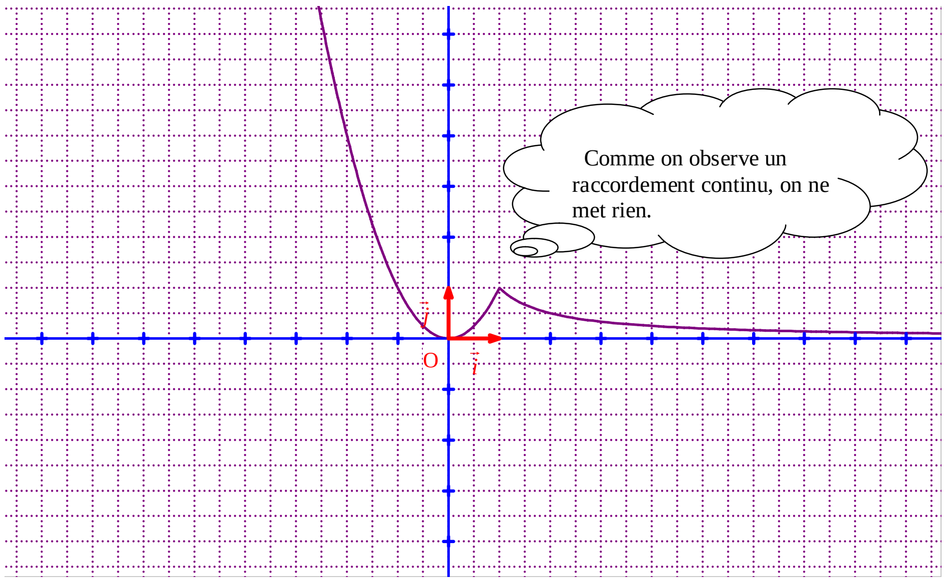
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ si $x < 1$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \geqslant 1$.

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.

Tracer au brouillon la courbe représentative de la fonction f et dire sans justifier si la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Donner l'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$.





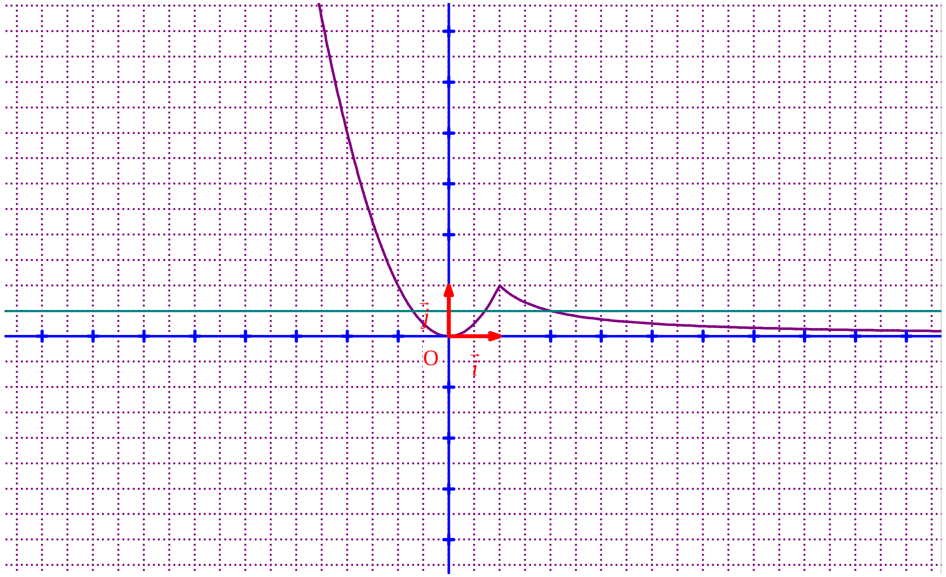
« Ça se rejoint »

« Elles se croisent ».

Comme il n'y a pas de rupture pour la courbe (pas de « saut »), la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ (E).

Graphiquement, on voit qu'il y a 3 solutions distinctes. Ensuite, il suffit de les calculer.



$$(\text{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{1}{2} \\ x<1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{2} \\ x\geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x<1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=2 \\ x\geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=2$$

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\,;-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;2\right\}$$

V.

Soit x un réel quelconque tel que $-\frac{5}{2}<x\leqslant -2$. Déterminer $\text{E}\left(\left|\,2x+1\right|\right)$ (justifier avec soin).

On part de l'encadrement $-\frac{5}{2}<x\leqslant -2$ (1).

(1) donne successivement (attention, il n'y a pas d'équivalence) :

$-5<2x\leqslant -4$

$-4<2x+1\leqslant -3$

D'où $3\leqslant \left|\,2x+1\right|<4$.

Par conséquent, $\text{E}\left(\left|\,2x+1\right|\right)=3$.

VI.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A, B, C les points d'affixes respectives – i, i, $-1+\text{i}$.
À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=z^2+\text{i}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des points M' lorsque M décrit le segment [AB].

1°) Soit M un point quelconque de [AB]. On note z l'affixe de M et on pose $z=\text{i}\lambda$ où λ est un réel.

a) À quel intervalle appartient λ ?

$\lambda\in[-1\,;1]$ (attention, λ est un réel)

b) Exprimer les coordonnées cartésiennes $(x'\,;y')$ de M' en fonction de λ sans détailler les calculs.

$x'=-\lambda^2$ et $y'=1$

2°) En déduire que M' appartient à une droite (à déterminer).

On a $y'=1$ donc $\text{M}'\in(\text{BC})$.

3°) Compléter :

Lorsque M décrit le segment [AB],

λ décrit l'intervalle $[-1\,;1]$;

$-\lambda^2$ décrit l'intervalle $[-1\,;0]$.

Pourquoi peut-on dire que lorsque M décrit le segment [AB], λ décrit l'intervalle $\left[-1\,;1\right]$?

Le point M a pour affixe $\mathrm{i}\lambda$.
Les points A et B ont pour affixes respectives – i et i.
Le mieux est de faire un graphique.

4°) En déduire l'ensemble *E* des points M' lorsque M décrit le segment [AB].

$E = \left[\mathrm{BC}\right]$

ou :

Lorsque M décrit [AB], M' décrit $\left[\mathrm{BC}\right]$.