TS

Devoir d'approfondissement sur les sommes

I. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n^2-1} \mathrm{E}\left(\sqrt{k}\right)$.

1°) Calculer S_n pour $n \in \{1\,;2\,;3\,;4\}$ « à la main ».

2°) Calculer S_1, S_2, S_3, …, S_{31} à l'aide de la calculatrice (on pourra définir la suite (S_n) à l'aide de la commande « somme »).

3°) Exprimer S_n en fonction de n.

II. Soit n un entier naturel non nul.

Pour toute famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de réels tels que pour tout entier i compris entre 1 et n au sens large on ait $x_i \in \{-1\,;1\}$, on pose $S = \sum_{i=1}^{i=n} x_i$.

Quel est l'ensemble des valeurs possibles de S lorsque $(x_1, x_2, ..., x_n)$ décrit l'ensemble des n-uplets de réels appartenant à $\{-1\,;1\}$?

Version écrite pour Nicolas Carteau

I. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \mathrm{E}\left(\sqrt{k}\right)$.

1°) Calculer S_2, S_3, …, S_{31} à l'aide de la calculatrice (on pourra définir la suite (S_n) à l'aide de la commande « somme »).
2°) Exprimer S_n en fonction de *n*.

1°) $S_2 = 3$, $S_3 = 13$, $S_4 = 34$,

2°) $S_5 = 70$, $S_6 = 125$, $S_7 = 203$, $S_8 = 308$, $S_9 = 444$, $S_{10} = 615$, $S_{12} = 1075$, $S_{13} = 1378$, $S_{14} = 1729$, $S_{15} = 2135$, $S_{16} = 2600$, $S_{17} = 3128$, $S_{18} = 3723$, $S_{19} = 4389$, $S_{20} = 5130$, $S_{21} = 5950$, $S_{22} = 6853$, $S_{23} = 7843$, $S_{24} = 8924$, $S_{25} = 10100$, $S_{26} = 11375$, $S_{27} = 12753$, $S_{28} = 14238$, $S_{29} = 15834$, $S_{30} = 17545$, $S_{31} = 19375$
Au-delà de S_{31}, la commande « somme » de la calculatrice ne fonctionne plus (affiche « Invalid dim »).

Le vendredi 2 décembre 2016

Capacité limitée de la calculatrice
$S_{31} = 19375$

2°) $S_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \mathrm{E}\left(\sqrt{k}\right)$

$$S_n = \mathrm{E}\left(\sqrt{0}\right) + \mathrm{E}\left(\sqrt{1}\right) + \mathrm{E}\left(\sqrt{2}\right) + \mathrm{E}\left(\sqrt{3}\right) + \mathrm{E}\left(\sqrt{4}\right) + \mathrm{E}\left(\sqrt{5}\right) + \ldots + \mathrm{E}\left(\sqrt{n^2-1}\right)$$
$$S_n = \mathrm{E}(0) + \mathrm{E}(1) + \mathrm{E}\left(\sqrt{2}\right) + \mathrm{E}\left(\sqrt{3}\right) + \mathrm{E}(2) + \mathrm{E}\left(\sqrt{5}\right) + \ldots + \mathrm{E}\left(\sqrt{n^2-1}\right)$$
$$S_n = 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + \mathrm{E}\left(\sqrt{n^2-1}\right)$$
$$S_n = 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots + (n-1)$$

$\mathrm{E}\left(\sqrt{n^2}\right) = n$ $\qquad$ $\mathrm{E}\left(\sqrt{(n-1)^2}\right) = n-1$

$$\forall n > 1 \qquad n^2 - 2n + 1 < n^2 - 1 < n^2$$
$$(n-1)^2 < n^2 - 1 < n^2$$
$$(n-1)^2 < \sqrt{n^2-1} < n$$

D'où $\forall n > 1 \quad \mathrm{E}\left(\sqrt{n^2 - 1}\right) = n - 1$

$$S_n = \underbrace{0}_{1} + \underbrace{1+1+1}_{3} + \underbrace{2+2+2+2+2}_{5} + \underbrace{3+3+3+3+3+3+3}_{7}$$

$0 \longrightarrow 1$

$1 \longrightarrow 4$

$2 \longrightarrow 9$

$3 \longrightarrow 16$

$4 \longrightarrow 25$

$5 \longrightarrow 36$

$6 \longrightarrow 49$

$7 \longrightarrow 64$

$8 \longrightarrow 81$

$9 \longrightarrow 100$

$10 \longrightarrow 121$

$11 \longrightarrow 144$

$12 \longrightarrow 169$

$13 \longrightarrow 196$

$14 \longrightarrow 225$

$15 \longrightarrow 256$

$16 \longrightarrow 289$

$17 \longrightarrow 324$

$18 \longrightarrow 361$

$19 \longrightarrow 400$

Nicolas avait écrit à côté entre les deux premières lignes un trait courbe à gauche avec marqué 3, ensuite 5, ensuite 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37

$1 \longrightarrow \underset{\mathbf{1}}{3}$ // $4 \longrightarrow \underset{\mathbf{2}}{8}$ // $9 \longrightarrow \underset{\mathbf{3}}{15}$// $\quad$ //$(n-1)^2 \longrightarrow \underset{\boldsymbol{n-1}}{n^2 - 1}$// $\; n^2$

1×2

$2 \times (8 - 4)$

$3 \times (15 - 9)$

.
.
.

$$k \times \left[(k+1)^2 - 1 - k^2 \right] \rightarrow 2k$$

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^{n^2} k \times 2k \right) + n$$

$$S_n = \cancel{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{\underset{3}{\cancel{6}}} + n$$