Trigonométrie Approfondissement

Le 5-2-2015

Linéariser : mettre la définition

Notions de base

I. Le cercle trigonométrique

On se place dans le plan orienté, c'est-à-dire que l'on a décidé d'un sens de parcours sur tous les cercles appelé **sens direct** ou **sens trigonométrique**. Il s'agit du sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.

On munit le plan orienté d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Définition :

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1. Sur ce cercle, on a le sens de parcours trigonométrique.

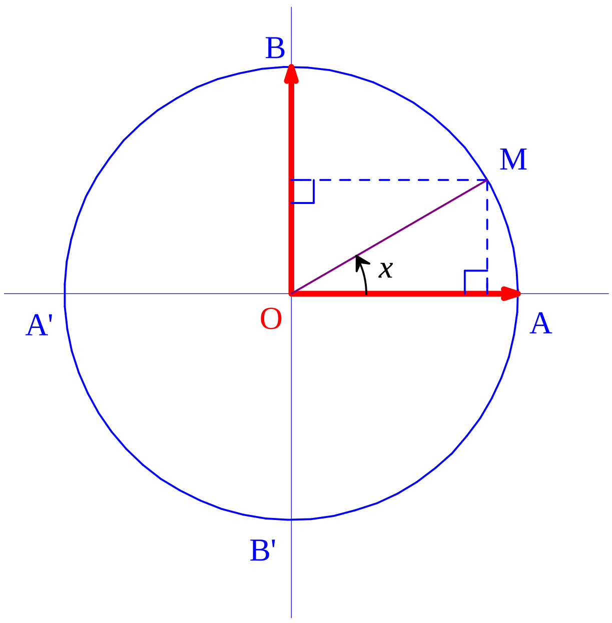
On définit les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$.

Il s'agit des points traditionnellement attachés au cercle trigonométrique.

Définition :

Pour tout réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)$.

M est appelé l'image du réel x sur le cercle trigonométrique.
On a : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right) = x \quad (\text{mod. } 2\pi)$.



II. Cosinus et sinus d'un réel x

Définition

Soit x un réel. On note M son image sur le cercle trigonométrique.

L'abscisse de M est appelé le **cosinus** de x noté $\cos x$; l'ordonnée de M est le **sinus** de x noté $\sin x$.

$\mathrm{M}(\cos x\,;\sin x)$

Il y a des touches de calculatrice pour le cosinus et le sinus.

Propriétés

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

(2) Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin x$.

(3) **Relation fondamentale :**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x+\sin^2 x=1$

III. Tangente et cotangente d'un réel x

Définition [tangente d'un réel]

Soit x un réel qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle **tangente** de x le réel $\frac{\sin x}{\cos x}$. On le note **tan x**.

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

Il y a une touche de calculatrice pour la tangente.

Définition [cotangente d'un réel]

Soit x un réel qui n'est pas de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle **cotangente** de x le réel $\dfrac{\cos\ x}{\sin\ x}$. Elle est notée **cot *x***.

$$\cot x = \frac{\cos\ x}{\sin\ x}$$

Il n'y a pas de touche de calculatrice pour la cotangente.

Définition [lignes trigonométriques d'un réel]

Les réels cos x, sin x, tan x, cot x sont appelés les **lignes trigonométriques** du réel x.

Propriété [relation entre tangente et cotangente d'un réel]

Soit x un réel qui n'est pas de la forme $\dfrac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a : $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

IV. Lecture graphique de la tangente et de la cotangente

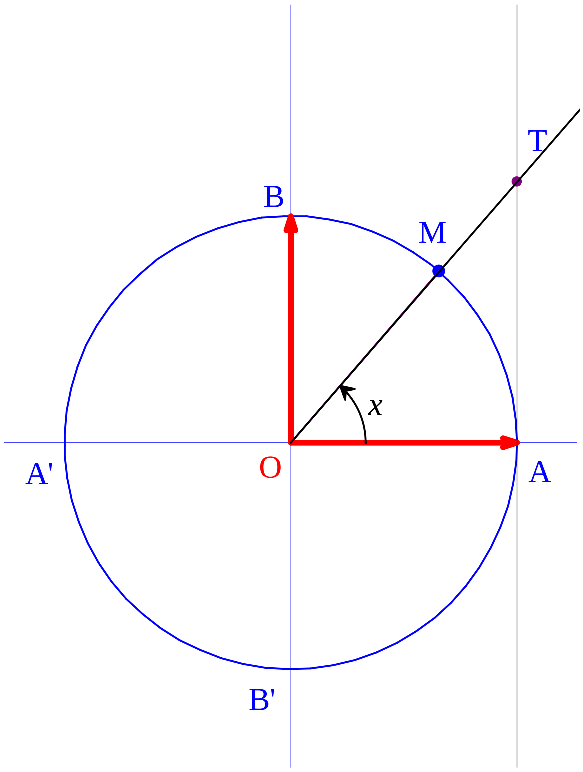
● Lecture graphique de la tangente

Soit x un réel qui n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit M son image sur le cercle trigonométrique.

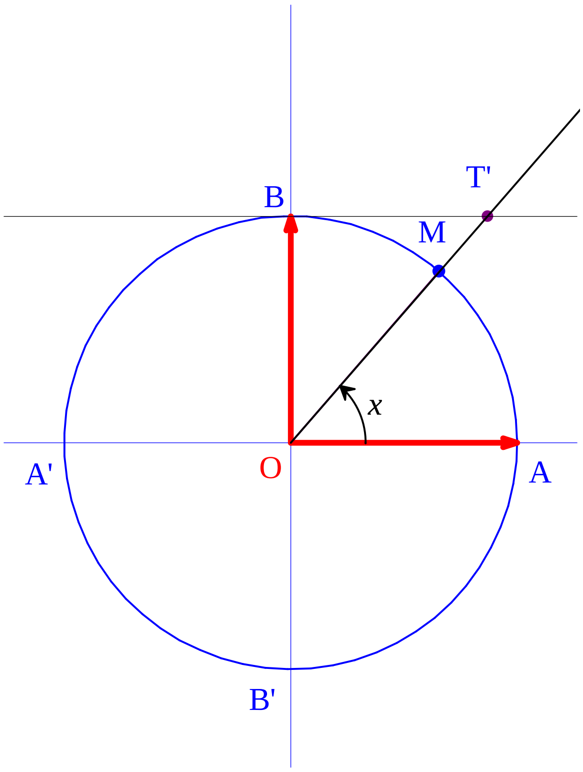
Soit T le point d'intersection de la droite (OM) et de la droite d'équation $x = 1$.

L'ordonnée du point T est égale à tan x.



● **Lecture graphique de la cotangente**

Soit x un réel qui n'est pas de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Soit M son image sur le cercle trigonométrique.
Soit T' le point d'intersection de la droite (OM) et de la droite d'équation $y = 1$.
L'abscisse du point T' est égale à cot x.



V. Relations importantes liant cosinus, sinus, tangente, cotangente

Propriété :

(1) Pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a : $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

(2) Pour tout réel x qui n'est pas de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a : $1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Démonstration :

(1) x est un réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

D'où : $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ soit $1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Donc $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

(2) x est un réel x qui n'est pas de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

D'où : $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$ soit $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+1 = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Donc $\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Utilisation :

Voir exercice

VI. Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Faire un cercle trigonométrique.

Moyen mnémotechnique pour retenir la moitié du tableau avec 0, 1, 2, 3, 4.

VII. Propriétés

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\tan(-x) = -\tan x$ à la condition que x ne soit pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\tan(\pi + x) = \tan x$ à la condition que x ne soit pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ à la condition que x ne soit pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$ à la condition que x ne soit pas de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$ à la condition que x ne soit pas de la forme $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Toutes ces formules se visualisent dans le cercle trigonométrique en utilisant les symétries.
Celles pour les cosinus et sinus se lisent sur les axes de coordonnées.
Celles pour la tangente se lisent sur l'axe de repère $\left(\mathrm{A}, \vec{i}\right)$.

VIII. Propriétés de périodicité

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de périodes 2π.

La fonction tangente est périodique de période π.

Par conséquent, on a les propriétés suivantes :

1. (déjà donnée)

Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, $\cos\left(x+2k\pi\right)=\cos\ x$ et $\sin\left(x+2k\pi\right)=\sin x$.

2.

Pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+m\pi$ avec $m\in\mathbb{Z}$ et pour tout entier relatif k, $\tan\left(x+k\pi\right)=\tan x$.

IX. Signe des lignes trigonométriques d'un réel

Soit x un réel quelconque.
Soit M le point image de x sur le cercle trigonométrique.

1^er^ cas : si M appartient à l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$

$\cos x \geqslant 0$

$\sin x \geqslant 0$

$\tan x \geqslant 0$

2^e^ cas : si M appartient à l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{A'B}}$

$\cos x \leqslant 0$

$\sin x \geqslant 0$

$\tan\ x \leqslant 0$

3^e cas : si M appartient à l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$

$\cos x \leqslant 0$

$\sin x \leqslant 0$

$\tan x \geqslant 0$

4^e cas : si M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB'}$

$\cos x \geqslant 0$

$\sin x \leqslant 0$

$\tan x \leqslant 0$

On visualise ces propriétés sur le cercle trigonométrique.

Exercices

$\boxed{1}$ Soit a le réel de $[0\,;\pi]$ tel que $\cos a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculer $\sin a$ et $\tan a$.

$\boxed{2}$ Soit a le réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin a = \dfrac{2}{3}$.

Calculer $\cos a$ et $\tan a$.

$\boxed{3}$ Soit a le réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan a = 3$.

Calculer $\sin a$ et $\cos a$.

$\boxed{4}$ Soit a le réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan a = -\dfrac{1}{2}$.

Calculer $\sin a$ et $\cos a$.

$\boxed{5}$ x désigne un réel.

Simplifier les expressions suivantes : $\sin(3\pi + x)$; $\cos(4\pi - x)$; $\sin(7\pi - x)$; $\cos(35\pi + x)$.

$\boxed{6}$ x désigne un réel qui n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Simplifier les expressions suivantes : $\tan(2\pi + x)$; $\tan(3\pi + x)$; $\tan(5\pi - x)$; $\tan(21\pi + x)$.

Solutions :

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit a le réel de $[0\,;\pi]$ tel que $\cos a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculer $\sin a$ et $\tan a$.

On a : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad (1)$.

(1) donne : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \sin^2 a = 1$

$\dfrac{1}{5} + \sin^2 a = 1$

$\sin^2 a = 1 - \dfrac{1}{5}$

$\sin^2 a = \dfrac{4}{5}$

Or $a \in [0\,;\pi]$ donc $\sin a \geqslant 0$.

On en déduit que : $\sin a = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\begin{aligned}\tan a &= \frac{\sin a}{\cos a} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \\ &= 2\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soit a le réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin a = \dfrac{2}{3}$.

Calculer $\cos a$ et $\tan a$.

On a : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad (1)$.

(1) donne alors $\cos^2 a + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1$ d'où $\cos^2 a = \dfrac{5}{9}$

Or $a \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos a \geqslant 0$

Par suite, $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$

On a :

$$\begin{aligned}\tan a &= \frac{\sin a}{\cos a}\\ &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit a le réel de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan a = 3$.
Calculer $\sin a$ et $\cos a$.

On a : $1+\tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ (1).

(1) donne $1+3^2 = \frac{1}{\cos^2 a}$.

Donc $10 = \frac{1}{\cos^2 a}$ d'où $\cos^2 a = \frac{1}{10}$.

Or $a \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos a > 0$.

On en déduit que $\cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

On a : $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ d'où $\sin a = \cos a \times \tan a$

On obtient : $\sin a = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

$\boxed{4}$ Soit a le réel de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan a=-\frac{1}{2}$.
Calculer $\sin a$ et $\cos a$.

On a : $1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}$ (1).

(1) donne $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 a}$

Donc $1+\frac{1}{4}=\frac{1}{\cos^2 a}$

Donc $\frac{5}{4}=\frac{1}{\cos^2 a}$.

Par suite, $\cos^2 a=\frac{4}{5}$.

Or $a\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos a>0$.

On en déduit que $\cos a=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

On a : $\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}$ d'où $\sin a=\cos a\times\tan a$.

On en déduit que : $\sin a=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\boxed{5}$ x désigne un réel.
Simplifier les expressions suivantes : $\sin(3\pi+x)$; $\cos(4\pi-x)$; $\sin(7\pi-x)$; $\cos(35\pi+x)$.

$\sin(3\pi+x)=\sin(2\pi+\pi+x)=\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\cos(4\pi-x)=\cos(-x)=\cos x$

$\sin(7\pi-x)=\sin(6\pi+\pi-x)=\sin(\pi-x)=\sin x$

$\cos(35\pi+x)=\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\boxed{\mathbf{6}}$ x désigne un réel qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Simplifier les expressions suivantes : $\tan\left(2\pi+x\right)$; $\tan\left(3\pi+x\right)$; $\tan\left(5\pi-x\right)$; $\tan\left(21\pi+x\right)$.

$\tan\left(2\pi+x\right)=\tan x$

$\tan\left(3\pi+x\right)=\tan x$ (propriété du cours)

$\tan\left(5\pi-x\right)=\tan\left(-x\right)=-\tan x$

$\tan\left(21\pi+x\right)=\tan x$

Autour des formules d'addition…

I. Addition

1°) Formules

$$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$ [On suppose que a, b, $a+b$ n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$]

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$ [On suppose que a, b, $a-b$ n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$]

2°) Démonstration

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

$$=\frac{(\sin a\cos b+\sin b\cos a):(\cos a\cos b)}{(\cos a\cos b-\sin a\sin b):(\cos a\cos b)}$$ (on peut diviser car $\cos a\cos b\neq 0$)

$$=\frac{\dfrac{\sin a}{\cos a}+\dfrac{\sin b}{\cos b}}{1-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$$

$$=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

$$=\frac{\frac{\sin a\cancel{\cos b}}{\cos a\cancel{\cos b}}+\frac{\sin b\cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}\cos b}}{1-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$$ (on peut diviser car $\cos a\cos b\neq 0$)

$$=\frac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{1-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$$

$$=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

3°) Exemple

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$.

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$ (autre écriture peu intéressante : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\times\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$)

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$ (autre écriture peu intéressante : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\times\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$)

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$=2-\sqrt{3}$$

Autres méthodes (cf. paragraphe suivant) :

1. $\tan\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}$

2. On a $\tan\frac{\pi}{6}=\tan\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$ etc.

$\tan\frac{\pi}{12}$ est solution d'une équation du second degré.
Il s'agit d'une méthode maladroite.

II. Transformation de produit en somme

1°) Formules

$$2\cos a\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b)$$

$$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$$

$$2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$$

$$2\sin b\cos a=\sin(a+b)-\sin(a-b)$$

2°) Démonstration

$$2\cos a\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b)$$

$$=\cos a\cos b-\sin a\sin b+\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$=2\cos a\cos b$$

Nous verrons l'utilisation des formules plus tard.

III. Transformation de somme en produit

1°) Formules de transformation de somme en produit

p et q sont deux réels quelconques.

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\times\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-\,2\sin\frac{p+q}{2}\times\sin\frac{p-q}{2}$$

2°) Moyen mnémotechnique

Un moyen ancien de mémoriser ces formules que je tiens d'un ancien professeur de mathématiques consiste à retenir une sorte de ritournelle (le début des sinus et des cosinus du second membre).

« si-co-co-si-co-co-si-si »

Formule		$\frac{p+q}{2}$ ↓	$\frac{p-q}{2}$ ↓
$\sin p+\sin q=$	2	si	co
$\sin p-\sin q=$	2	co	si
$\cos p+\cos q=$	2	co	co
$\cos p-\cos q=$	– 2	si	si

Chaque produit est multiplié par 2.
Il y a un – pour le dernier.

On pourra retenir que la formule $\cos p+\cos q$ est « sympathique ». On reste avec des cosinus.

Nous en verrons l'utilisation des formules plus tard.

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
2\sin\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2} &= \sin\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)+\sin\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)\\
&= \sin\left(\frac{2p}{2}\right)+\sin\left(\frac{2q}{2}\right)\\
&= \sin p+\sin q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\cos\frac{p+q}{2}\times\sin\frac{p-q}{2} &= \sin\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)-\sin\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)\\
&= \sin\frac{2p}{2}-\sin\frac{2q}{2}\\
&= \sin p-\sin q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\cos\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2} &= \cos\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)+\cos\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{2p}{2}\right)+\cos\left(\frac{2q}{2}\right)\\
&= \cos p+\cos q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\sin\frac{p+q}{2}\times\sin\frac{p-q}{2} &= \cos\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)-\cos\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{2q}{2}\right)-\cos\left(\frac{2p}{2}\right)\\
&= \cos q-\cos p
\end{aligned}
$$

Autour de la duplication…

I. Duplication

1°) Formules

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$ [On suppose que x et $2x$ n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$]

2°) Démonstration

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x+x)\\ &= \cos x \times \cos x - \sin x \times \sin x\\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \left(1-\cos^2 x\right)\\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \left(1-\sin^2 x\right) - \sin^2 x\\ &= 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2x &= \tan(x+x)\\ &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

3°) Exemple (lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$)

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{\pi}{8}$.

• Calcul de $\cos\frac{\pi}{8}$.

On a : $\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$

D'où $\frac{\sqrt{2}}{2}=2\times\cos^2\frac{\pi}{8}-1$.

Donc $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Par conséquent, $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Or $\frac{\pi}{8}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{\pi}{8}\geqslant 0$.

D'où $\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$.

• Calcul de $\sin\frac{\pi}{8}$.

On a : $\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$.

Donc $\frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\times\sin^2\frac{\pi}{8}$.

D'où $2\times\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Par conséquent, $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $\sin\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Or $\frac{\pi}{8}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\frac{\pi}{8}\geqslant 0$.

D'où : $\boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$.

• **Calcul de $\tan\frac{\pi}{8}$.**

On a : $\tan\frac{\pi}{4} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$.

Or $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

Donc $1 = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ d'où $1-\tan^2\frac{\pi}{8} = 2\tan\frac{\pi}{8}$ soit $\tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0$.

$\tan\frac{\pi}{8}$ est donc solution de l'équation $X^2 + 2X - 1 = 0$ (1).

Le discriminant réduit de cette équation est $\Delta' = 2$.

(1) admet donc deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $X_1 = -1-\sqrt{2}$ et $X_2 = -1+\sqrt{2}$.

Or $\frac{\pi}{8} \in \left[0\,;\frac{\pi}{8}\right[$ donc $\tan\frac{\pi}{8} > 0$.

D'où $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

II. Formules de linéarisation

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \end{aligned}}$$

Ces formules sont intéressantes sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{1+\cos x}{2} \\ \sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1-\cos x}{2} \end{aligned}}$$

III. Formules de triplication

1°) Formules

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

2°) Démonstration

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) \\
&= \cos 2x \times \cos x - \sin 2x \times \sin x \\
&= \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\
&= \cos x\left(2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x\right) \\
&= \cos x\left(2\cos^2 x - 1 - 2\left(1 - \cos^2 x\right)\right) \\
&= \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) \\
&= \sin 2x \times \cos x + \sin x \times \cos 2x \\
&= 2\cos^2 x \sin x + \sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right) \\
&= \sin x\left(2\cos^2 x + 1 - 2\sin^2 x\right) \\
&= \sin x\left(2\left(1 - \sin^2 x\right) + 1 - 2\sin^2 x\right) \\
&= \sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

Exercices

1 Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

2 Calculer $\cos\frac{7\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\tan\frac{7\pi}{12}$.

3 Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$ en utilisant les formules de duplication.
Vérifier que les valeurs coïncident avec celles obtenues en utilisant les formules d'addition.

4 Linéariser $\cos^4 x$.

5 Calculer $\tan\frac{\pi}{24}$ (valeur exacte sans racines au dénominateur).

Solutions

$\boxed{\textbf{1}}$ Exprimer $\cos 4x$ en fonction de cos *x*.

On applique deux fois la formule « cos 2*a* ».

On pourrait poser $X = 2x$.

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos(2\times 2x)\\ &= 2\cos^2(2x)-1\\ &= 2(\cos 2x)^2-1\\ &= 2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1\end{aligned}$$

(on pourrait s'arrêter là car on a répondu à la question ; on va tout de même développer)

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

On obtient une expression « compliquée » selon l'avis de certains élèves.

Il s'agit d'une expression qui peut être intéressante dans certaines situations.

Cette expression ne servirait à rien pour dériver cos 4*x* ; on sait le dériver sans cette formule.

Plus généralement, il est possible d'obtenir une expression polynomiale de $\cos(nx)$ $(n\in\mathbb{N})$ en fonction de $\cos x$ (il s'agit des polynômes de Tchebytcheff de 1ère espèce).

Remarque de Timothée Savouré (séance d'accompagnement personnalisé) le 15-10-2015 :
Quand on demande d'exprimer en fonction de cos *x* et sin *x*, ce n'est pas grave s'il y a des puissances.

$\boxed{\textbf{2}}$ Calculer $\cos\dfrac{7\pi}{12}$, $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{7\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

À l'avant-dernière ligne, on pourrait mettre en facteur $\sqrt{2}$ mais le résultat obtenu n'est pas forcément plus joli que celui que nous avons donné.

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$
$$=-2-\sqrt{3}$$

Autre méthode :

On écrit $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{6\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{6\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=-\sin\frac{\pi}{12}$$

On utilise la valeur de $\sin\frac{\pi}{12}$ obtenue dans le cours. Ce n’est pas trop ça qu’on attends car les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$ obtenue dans le cours ne sont pas à connaître par cœur.

On préfèrera la décomposition $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ car on ne connaît pas la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$.

$\boxed{3}$ Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\tan\dfrac{\pi}{12}$ en utilisant les formules de duplication.
Vérifier que les valeurs coïncident avec celles obtenues dans le cours en utilisant les formules d'addition.

On a : $\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}$

Donc

$$2\cos^2\frac{\pi}{12}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'où

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Or $\dfrac{\pi}{12}\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Par conséquent, $\cos\dfrac{\pi}{12}\geqslant 0$ d'où $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

On a : $\cos^2\dfrac{\pi}{12}+\sin^2\dfrac{\pi}{12}=1$.

Donc $\sin^2\dfrac{\pi}{12}=1-\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Or $\dfrac{\pi}{12}\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Par conséquent, $\sin\dfrac{\pi}{12}\geqslant 0$ d'où $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

En utilisant les formules d'addition, on avait obtenu les valeurs :

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Une méthode pour vérifier que les valeurs coïncident est d'élever les valeurs au carré.

Une autre méthode plus compliquée consiste) à voir que $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ et $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ sont des racines réductibles grâce à une identité remarquable : $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2=.....$; de même, avec la seconde expression.

$\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ $\to$ on ne peut pas continuer facilement (expression « moche » selon l'avis d'un élève)

Dans le cours on a donné une expression plus simple en utilisant la formule d'addition du cosinus : $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

On peut démontrer que les deux expressions coïncident.

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\dots$$

$\boxed{\textbf{4}}$

On a : $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

Donc en élevant les deux membres au carré, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^4 x&=\frac{(1+\cos 2x)^2}{4}\\&=\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\\&=\frac{1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}}{4}\\&=\frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8}\\&=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$

$$\tan\frac{\pi}{24}=\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\times\tan\frac{\pi}{8}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1-\sqrt{2}}{1+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3}{3-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{3-3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\left(3-3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{\left(3-3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{6}\right)^2-3}$$

$$=\frac{12-6\sqrt{2}}{12+6\sqrt{6}}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$=-2+\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

Expressions de cos x, sin x, tan x en fonction de tan $\frac{x}{2}$

1°) Formules

Soit x un réel qui n'est pas de la forme $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $t = \tan\frac{x}{2}$.

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ces formules donnent des expressions rationnelles de $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.

2°) Démonstration

$$\cos x = \frac{\cos\left(2\times\frac{x}{2}\right)}{1}$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sin x = \frac{\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)}{1}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\tan x = \tan\left(2\times\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Autre façon :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

3°) Utilisation

Dans le supérieur (changement de variables dans les intégrales par exemple)

Transformation d'expression de la forme $a\cos x + b\sin x$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Technique générale :

On pose $\mathrm{E} = a\cos x + b\sin x$.

On factorise l'expression par $\sqrt{a^2+b^2}$ (il s'agit d'une factorisation forcée).

$$\mathrm{E} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

On constate que $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$.

Donc il existe un réel φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

On peut donc écrire $\mathrm{E} = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi)$ d'où $\mathrm{E} = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$.

L'intérêt de cette formule est de résoudre des (in)équations comme nous le verrons plus loin.

Exercice

Réduire les expressions suivantes :

$A = \sqrt{3}\cos x + \sin x$
$B = \cos x - \sin x$
$C = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

Solution :

$A = \sqrt{3}\cos x + \sin x$

On applique la technique générale avec $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$.

On calcule $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

$$A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$$

On cherche un réel φ tel que $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{1}{2}$.

On peut donc choisir $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

On a : $A = 2\left(\cos x \times \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \times \sin\frac{\pi}{6}\right)$.

On en déduit $A = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Variante dans le cours :

$$\exists \varphi \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}.$$

Variante dans l'exercice :

Il existe un réel φ tel que $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$\varphi = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

D'où $A = 2\left(\cos x \times \cos\dfrac{\pi}{6} + \sin x \times \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$A = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Autre méthode beaucoup plus rapide :

$$\begin{aligned} A &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) \\ &= 2\left(\cos x \times \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \times \sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos x - \sin x \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos x \times \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \times \sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{3}\sin x + \cos x \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \\ &= 2\left(\sin x \times \sin\frac{\pi}{3} + \cos x \times \cos\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Variante :

$$\begin{aligned}
C &= \sqrt{3}\sin x + \cos x \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \\
&= 2\left(\sin x \times \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \times \sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Équations trigonométriques avec cosinus et sinus

Règles fondamentales :

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

En général, il y a deux familles des solutions.

Équations trigonométriques particulières : équations trigonométriques n'ayant qu'une seule famille de solutions

Représentation des familles de solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \quad (1)$$

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x \qquad (2)$$

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0 \qquad (3)$$

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0 \qquad (4)$$

$$\cos x+\cos 3x=\sin x+\sin 3x \qquad (5)$$

$$\cos^2 x-\sin 2x+2\sin^2 x=2 \quad (6)$$

Solutions

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=x-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x+\frac{\pi}{4}=-x+\frac{\pi}{6}+2k'\pi \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k'\pi \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x=-\frac{\pi}{12}+2k'\pi \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{36}+\frac{2k'\pi}{3} \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$\boxed{S_1=\left\{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{36}+\frac{2k'\pi}{3},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$ (2).

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\frac{\pi}{2}=x+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x+\frac{\pi}{2}=\pi-x+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 4x=\frac{\pi}{2}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k'\pi}{2} \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$\boxed{S_2=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k'\pi}{2},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ (3).

$$(3) \Leftrightarrow \boxed{\sin x}+\sin 2x+\boxed{\sin 3x}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x+3x}{2}\times\cos\frac{x-3x}{2}+\sin 2x=0 \qquad \text{formule } \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\times\cos(-x)+\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\times\cos x+\sin 2x=0 \qquad (\cos(-x)=\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\times(2\cos x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=0 \quad \text{ou} \quad 2\cos x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=0 \quad \text{ou} \quad \cos x=-\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ (voir note en dessous) ou $x=\frac{2\pi}{3}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z})$ ou $x=-\frac{2\pi}{3}+2k''\pi \quad (k''\in\mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{k\pi}{2}\quad (k\in\mathbb{Z})\quad \text{ou}\quad x=\frac{2\pi}{3}+2k'\pi\quad (k'\in\mathbb{Z})\ \text{ou}\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k''\pi\quad (k''\in\mathbb{Z})$$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$$\boxed{\boldsymbol{S_3=\left\{\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\ \frac{2\pi}{3}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\ -\frac{2\pi}{3}+2k''\pi,\ k''\in\mathbb{Z}\right\}}}$$

Note : on se réfère à la résolution des équations particulières

$\sin X=0\ \Leftrightarrow\ X=k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ (4).

(4) $\Leftrightarrow\ 2\cos(2x)\times\cos x+\cos(2x)=0$

$$\Leftrightarrow\ \cos(2x)\times(2\cos x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \cos(2x)=0\quad \text{ou}\qquad 2\cos x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ \cos(2x)=0\quad \text{ou}\qquad \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})\quad \text{ou}\quad x=\frac{2\pi}{3}+2k'\pi\quad (k'\in\mathbb{Z})\ \text{ou}\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k''\pi\quad (k''\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\quad (k\in\mathbb{Z})\quad \text{ou}\quad x=\frac{2\pi}{3}+2k'\pi\quad (k'\in\mathbb{Z})\ \text{ou}\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k''\pi\quad (k''\in\mathbb{Z})$$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$$\boxed{\boldsymbol{S_4=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\ \frac{2\pi}{3}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\ -\frac{2\pi}{3}+2k''\pi,\ k''\in\mathbb{Z}\right\}}}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x+\cos 3x=\sin x+\sin 3x$ (5)

(5) $\Leftrightarrow\ 2\cos(2x)\times\cos x=2\sin(2x)\times\cos x$

$$\Leftrightarrow\ \cos x\times\left[\cos(2x)-\sin(2x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ \cos x=0\quad \text{ou}\quad \cos 2x=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow\ \cos x=0\quad \text{ou}\quad \cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad 2x=\frac{\pi}{2}-2x+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad 2x=-\frac{\pi}{2}+2x+2k''\pi \quad (k''\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{k'\pi}{2} \quad (k'\in\mathbb{Z})$$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$$\boxed{\boldsymbol{S_5=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k'\pi}{2},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^2 x-\sin 2x+2\sin^2 x=2$ (6).

$$(6) \Leftrightarrow \cos^2 x-2\sin x\cos x+2-2\cos^2 x=2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-2\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x-2\sin x-2\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(-2\sin x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \quad (6') \quad \text{ou} \quad -2\sin x-\cos x=0 \quad (6'')$$

$$(6') \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$(6'') \Leftrightarrow \cos x+2\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\times\cos x+\frac{2}{\sqrt{5}}\times\sin x\right)=0$$ (transformation d'une expression de la forme $a\cos x+b\sin x$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\times\cos x+\frac{2}{\sqrt{5}}\times\sin x=0$$

On a : $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=1$.

On ne connaît pas de réel dont le cosinus est égal à $\frac{1}{\sqrt{5}}$ et le sinus est égal à $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

On pose donc $\alpha=\text{Arccos}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

α est l'unique réel de l'intervalle [0 ; π] tel que $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha\\ &= 1-\frac{1}{5}\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

On a donc $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ avec $\alpha \in [0\,;\,\pi]$.

$$\begin{aligned}(6'') &\Leftrightarrow \cos\alpha\times\cos x+\sin\alpha\times\sin x=0\\ &\Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=0\\ &\Leftrightarrow x-\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\\ &\Leftrightarrow x=\alpha+\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

Soit S_6 l'ensemble des solutions de (6).

$$\boxed{\boldsymbol{S_6=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\ \alpha+\frac{\pi}{2}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}}$$

On peut aussi écrire :

$$\boxed{\boldsymbol{S_6=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\ \mathrm{Arccos}\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\pi}{2}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}}$$

Cette écriture peut laisser un sentiment d'inachèvement à cause du α qu'on a l'impression de ne pas connaître ; il n'en est rien.
Certes, on n'a pas donné véritablement la valeur exacte de α, mais on l'a néanmoins parfaitement défini en posant $\alpha = \mathrm{Arccos}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. On peut même considérer que cette dernière écriture est la valeur exacte de α.

α est un nombre irrationnel.
On peut connaître le début de son écriture décimale grâce à la calculatrice (mise en mode radians).

Arccos, Arcsin, Arctan : notations vues au collège avec la calculatrice (calculatrice CASIO fx 92 collège).
Ces notations continuent pour les élèves de lycée qui ont une calculatrice CASIO.

Sur calculatrice CASIO 35 + :

2nde cos (Acs) : affichage $\cos^{-1}$

2nde sin (Asn) : affichage $\sin^{-1}$
2nde tan (Atn) : affichage $\tan^{-1}$

Pour les élèves qui ont une calculatrice TI au lycée, elles sont remplacées par les notations $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$.

Les notations Arccos, Arcsin, Arctan correspondent à des fonctions mathématiques très importantes qui seront étudiées dans le supérieur.

Les notations $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$ sont des notations de calculatrice, ce ne sont pas des notations mathématiques. Cela ne s'écrit pas sur papier.

La calculatrice renvoie un résultat en degré ou en radian selon le mode dans lequel on se place.
Nous verrons qu'il y a une différence avec les notations mathématiques.

Bilan sur l'écriture de ces ensembles de solutions : on a des accolades et une virgule.
Attention à la syntaxe et à la lecture.

Équations trigonométriques avec tangentes

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\tan x$ existe si et seulement si x n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

M est l'image du réel x sur le cercle trigonométrique.

$\mathbf{\tan x = \overline{AT}}$

Il s'agit de la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AT}$ selon le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

Valeurs remarquables (tableau à savoir par cœur, même si on peut retrouver les valeurs aisément à partir de celles du cosinus et de la tangente).

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π
$\tan x$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

Les valeurs de $\tan 0$, $\tan\dfrac{\pi}{4}$, $\tan\dfrac{3\pi}{4}$, $\tan\pi$ se retrouvent graphiquement sur le cercle trigonométrique.

Règle fondamentale d'égalités de deux tangentes :

a et b sont deux réels qui ne sont pas de la forme $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$\mathbf{\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})}$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\tan a = \tan b \; &\Leftrightarrow \; \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin b}{\cos b} \\
&\Leftrightarrow \; \sin a \cos b - \cos a \sin b = 0 \\
&\Leftrightarrow \; \sin\left(a - b\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \; a - b = k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \; a = b + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

On retrouve cette propriété géométriquement sur le cercle trigonométrique (points diamétralement opposés).

Applications aux équations

Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan 2x \quad (1)$$

$$\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad (2)$$

$$\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3)$$

$$\tan x=-\sqrt{3} \qquad (4)$$

$$\tan x+\tan 2x=0 \qquad (5)$$

$$\tan 2x=\tan\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) \qquad (6)$$

Solutions

Avant de résoudre on doit donner le domaine de résolution.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan 2x$ (1).

On doit avoir :

$x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ et $2x\neq\frac{\pi}{2}+k'\pi\ \left(k'\in\mathbb{Z}\right)$

$x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ et $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k'\pi}{2}\ \left(k'\in\mathbb{Z}\right)$

$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k'\pi}{2}\ \left(k'\in\mathbb{Z}\right)$ (condition minimale)

On résout l'équation dans $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Toutes les équivalences qui vont suivre sont valables pour $x \in D$.

$$(1)\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=2x+k\pi\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}-k\pi\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Il faut ensuite regarde l'ensemble de résolution D que l'on a déterminé au début.

On constate que l'ensemble des réels de la forme $\frac{\pi}{4}-k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ est inclus dans l'ensemble des nombres de la forme $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\varnothing$

Timothée Savouré 8 décembre 2015 Trigonométrie Approfondissement

Résolution de l'équation (1) avec les tangentes

Question de Timothée Savouré : pourquoi l'ensemble des solutions est-il l'ensemble vide ?

Il faut regarder l'ensemble de définition $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

L'ensemble des $-k\pi$ est inclus dans l'ensemble des $\frac{k\pi}{2}$.

● Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ (2).

On doit avoir :

$$3x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

$$x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

On résout l'équation dans $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Toutes les équivalences qui vont suivre sont valables pour $x\in D$.

$$(2)\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2=\left\{\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

● Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (3).

On doit avoir :

$$2x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\ \text{ et }\ \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k'\pi\quad(k'\in\mathbb{Z})$$

$$x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\quad(k\in\mathbb{Z})\ \text{ et }\ x\neq\pi+k'\pi\quad(k'\in\mathbb{Z})$$

On résout l'équation dans $D = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \right\} \right)$.

Toutes les équivalences qui vont suivre sont valables pour $x \in D$.

$$(3) \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{x}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$$S_3 = \left\{ -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Inéquations trigonométriques

Cours

Il n'y aucune règle. On utilise le cercle trigonométrique.

I. Inéquations en cosinus et sinus

Nous allons nous intéresser aux inéquations de la forme $\cos x > a$ ou $\cos x < a$ (idem avec des inégalités larges et des sinus) où a est un réel donné.
On les résout avec le cercle trigonométrique.
Exemple :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

On transforme $\dfrac{1}{2}$ en cos mais on ne l'écrit pas dans la résolution (fondamental).

On repasse l'arc des solutions en rouge.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,;\, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

Le symbole $\cup$ marque l'union de tous les arcs de cercles solutions (avec les $+2k\pi$ par exemple).

Toutes les inéquations en tangente se résolvent également avec un cercle trigonométrique

II. Inéquations en tangente

Nous allons nous intéresser aux inéquations de la forme $\tan x > a$ ou $\tan x < a$ (idem avec des inégalités larges et des sinus) où a est un réel donné.
On les résout avec le cercle trigonométrique.

Exemple :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\tan x \leqslant 1$ (2).

On transforme 1 en tan mais on ne l'écrit pas dans la résolution (fondamental).

On trace le cercle trigonométrique. On lit la tangente de x sur la tangente au cercle trigonométrique au point A.

Apparaît alors un carré de côté 1. On veut que $\tan x \leqslant 1$ donc il s'agit de deux parties du cercle (faire un dessin explicite). Il y a deux parties car la tangente a une symétrique, on retire donc de la solution tan x > 1, et son symétrique, de l'autre côté du cercle.

L'échelle sur l'axe des tangentes est strictement la même que le cercle, ce qui permet de comparer aisément.

On repasse les arcs des solutions en rouge.

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \, ; \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right[$$

Méthode fausse :

$\tan x \leqslant 1$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} \leqslant 1$

$\sin x \leqslant \cos x$

Cette méthode n'est pas une bonne méthode de résolution.

Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$2\sin x - \sqrt{3} > 0$ (1)

$\cos 2x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

Solutions

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\sin x - \sqrt{3} > 0$ (1).

(1) $\Leftrightarrow$ $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Il n'y pas de règle pour résoudre.

On repasse en rouge l'arc qui correspond aux images des solutions.

On donne ensuite directement l'ensemble des solutions.

$$S_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,;\, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right[$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos 2x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2).

On pose $X = 2x$.

(2) s'écrit $\cos X \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(2')$.

$$(2') \Leftrightarrow X \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,;\, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right]$$

On peut donc écrire :

$$(2) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + k\pi \,;\, \frac{\pi}{8} + k\pi \right]$$

$$S_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + k\pi \,;\, \frac{\pi}{8} + k\pi \right]$$