Exercices d'algèbre poussés

$\boxed{\textbf{1}}$ Soit *a*, *b*, *c* trois réels deux à deux distincts.

Déterminer une expression simplifiée de $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

$\boxed{\textbf{2}}$ Soit *a*, *b*, *c* trois réels non nuls tels que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$.

Démontrer que l'on a alors $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$.

$\boxed{\textbf{3}}$ Soit *a*, *b*, *c* trois réels non nuls vérifiant l'égalité $ab+bc+ca=0$.

Calculer $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$.

$\boxed{\textbf{4}}$ Soit *a*, *b*, *c* trois réels vérifiant $abc=1$.

Démontrer que l'on a : $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2=4+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)\left(c+\dfrac{1}{c}\right)$.

$\boxed{\textbf{5}}$ Soit *a* un réel quelconque.

Calculer $\left(\dfrac{2a}{1+a^2}\right)^2+\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2$.

Corrigé

$\boxed{1}$ Soit a, b, c trois réels deux à deux distincts.

Déterminer une expression simplifiée de $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

On pose $S=\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

Il faut choisir un « bon » dénominateur.
On choisit comme dénominateur commun $(a-b)(b-c)(c-a)$.

$$S=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a}{(b-a)(c-a)}-\frac{b}{(c-b)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a(c-b)-b(c-a)+c(b-a)}{(c-b)(b-a)(c-a)}$$

$$=\frac{ac-ab-bc+ab+cb-ac}{(c-b)(b-a)(c-a)}$$

$$=0$$

Variante :

$$S=\frac{a}{(a-b)(a-c)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$$

$$S=\frac{a(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}-\frac{b(a-c)}{(b-c)(a-b)(a-c)}+\frac{c(a-b)}{(a-c)(b-c)(a-b)}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soit a, b, c trois réels non nuls tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

Démontrer que l'on a alors : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$.

L'égalité $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ donne $\frac{bc+ac+ab}{abc}=0$ d'où $bc+ac+ab=0$.

Or $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ (identité remarquable qui se démontre en écrivant $(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$).

On peut écrire $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.

Or $bc+ac+ab=0$.

Par conséquent, $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit a, b, c trois réels non nuls vérifiant l'égalité $ab+bc+ca=0$.

Calculer $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$.

$$S=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

$$=\frac{bc(b+c)+ac(c+a)+(a+b)ab}{abc}$$

$$=\frac{b^2c+c^2b+c^2a+a^2c+a^2b+b^2a}{abc}$$

$$=\frac{b(bc+ba)+c(bc+ca)+a(ac+ab)}{abc}$$

$$=\frac{b(-ca)+c(-ab)+a(-bc)}{abc} \quad \text{(car } ab+bc=-ca\text{ , } bc+ca=-ab\text{ , } ac+ab=-bc\text{)}$$

$$=\frac{-abc-abc-abc}{abc}$$

$$=-3$$

$\boxed{4}$ Soit a, b, c trois réels vérifiant $abc=1$.

Démontrer que l'on a : $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2=4+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)$.

Méthode : on développe séparément le premier membre et le second membre

On pose $\text{A}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2$ et $\text{B}=4+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)$.

1$^{\text{er}}$ membre :

$$\begin{aligned}\text{A}&=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\\&=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+6\end{aligned}$$

Or a $abc=1$ donc $\frac{1}{a}=bc$ d'où $\frac{1}{a^2}=\left(\frac{1}{a}\right)^2=(bc)^2$.

Idem pour $\frac{1}{b^2}$ et $\frac{1}{c^2}$.

On a donc $\text{A}=a^2+b^2+c^2+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2+6$.

2$^{\text{e}}$ membre :

$$\begin{aligned}\text{B}&=4+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\\&=4+\left(ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\\&=4+abc+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{c}{ab}+\frac{ab}{c}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{1}{abc}\\&=4+1+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{c}{ab}+\frac{ab}{c}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{1}{1}\\&=6+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{c}{ab}+\frac{ab}{c}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}\\&=6+(ac)^2+(bc)^2+c^2+(ab)^2+a^2+b^2\end{aligned}$$

(on utilise la relation $abc=1$ donc $b=\frac{1}{ac}$, $a=\frac{1}{bc}$, $c=\frac{1}{ab}$, $ab=\frac{1}{c}$, $bc=\frac{1}{a}$, $ac=\frac{1}{b}$)

On constate que $\text{A}=\text{B}$.
On a donc établi l'égalité.

$\boxed{5}$ Soit a un réel quelconque.

Calculer $\left(\dfrac{2a}{1+a^2}\right)^2+\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2$.

On pose $\mathrm{A}=\left(\dfrac{2a}{1+a^2}\right)^2+\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2$.

$$\mathrm{A}=\frac{(2a)^2}{\left(1+a^2\right)^2}+\frac{\left(1-a^2\right)^2}{\left(1+a^2\right)^2}$$

$$=\frac{(2a)^2+\left(1-a^2\right)^2}{\left(1+a^2\right)^2}$$

$$=\frac{4a^2+1-2a^2+a^4}{\left(1+a^2\right)^2}$$

$$=\frac{a^4+2a^2+1}{\left(1+a^2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(a^2+1\right)^2}{\left(1+a^2\right)^2}$$

$$=1$$