1ère S1

Contrôle du lundi 24 novembre 2014 (3 heures)

• Le barème est donné sur 40.

• On répondra directement sur la copie fournie avec le sujet.

• Un certain nombre de questions nécessite une recherche préalable au brouillon. On ne rédigera sur la copie qu'après avoir effectué cette recherche.

I. (8 points)

Cet exercice est un QCM composé de 8 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau fourni sur la copie en complétant avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Aucune justification n'est attendue.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $1-2\sqrt{x}>0$ est :

a. $\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[$ b. $\left[0\,;\frac{1}{4}\right[$ c. $\left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$

2°) On considère l'algorithme suivant, rédigé en langage naturel.

Variables : a et b deux nombres réels

Entrée :
Saisir a
Saisir b

Traitement :
a prend la valeur $a-b$
b prend la valeur $-a^2+b$

Sortie :
Afficher a
Afficher b

Si l'on saisit 2 pour valeur de a et 3 pour valeur de b en entrée, les nombres affichés en sortie sont, dans l'ordre :

a. – 1 et 4 b. – 1 et 2 c. – 1 et – 1

3°) L'équation $x^2+x-m=0$ d'inconnue réelle x où m est un réel admet deux racines distinctes si et seulement si :

a. $m<-\frac{1}{4}$ b. $m\geqslant-\frac{1}{4}$ c. $m>-\frac{1}{4}$

4°) On considère l'algorithme suivant, rédigé en langage naturel.

Variables : x et y deux nombres réels

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $x\geqslant 0$
alors y prend la valeur $2x$
Sinon
y prend la valeur 0
FinSi

Sortie :
Afficher y

La fonction f qui à tout réel x saisi en entrée associe le réel y affiché en sortie est définie par :

a. $f(x)=x+|x|$ b. $f(x)=x-|x|$ c. $f(x)=2|x|$

5°) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $|3x+1|\leqslant 1$ est :

a. $\left[-\frac{2}{3}\,;0\right]$ b. $\left[0\,;\frac{2}{3}\right]$ c. $\left]-\infty\,;0\right]$

6°) On pose $\mathrm{A}(x)=3|-x|+2|-2x|-|x|$.
Pour tout réel x, $\mathrm{A}(x)$ est égal à :

a. $6|x|$ b. $-8|x|$ c. $|x|$

7°) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x+1\geqslant\frac{2}{x}$ est :

a. $[-2\,;0[\cup[1\,;+\infty[$ b. $]-\infty\,;-2]\cup[1\,;+\infty[$ c. $]-\infty\,;-2]\cup]0\,;1]$

8°) La forme canonique de $2x^2-2x+1$ est :

a. $(x-1)^2+x^2$ b. $2x(x-1)+1$ c. $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

II. (8 points)

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto a+\dfrac{b}{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ où a et b sont deux réels tels que $b \neq 0$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On sait que $\mathscr{C}$ passe par les points $\text{A}(1\,;0)$ et $\text{B}\left(4\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a : $f(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2°) Compléter sans justifier le tableau suivant permettant d'obtenir les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$f(x)$	

3°) Calculer $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$; en déduire la valeur exacte de $f\left(3+2\sqrt{2}\right)$ (on donnera le résultat sous la forme la plus simple possible sans dénominateur).

Partie 2

On note $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On admet que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en un unique point A de coordonnées $\left(x_0\,;y_0\right)$.

1°) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur l'écran de la calculatrice graphique ; en déduire les valeurs arrondies au centième de x_0 et y_0.

2°) Donner les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ par lecture graphique sur la calculatrice.

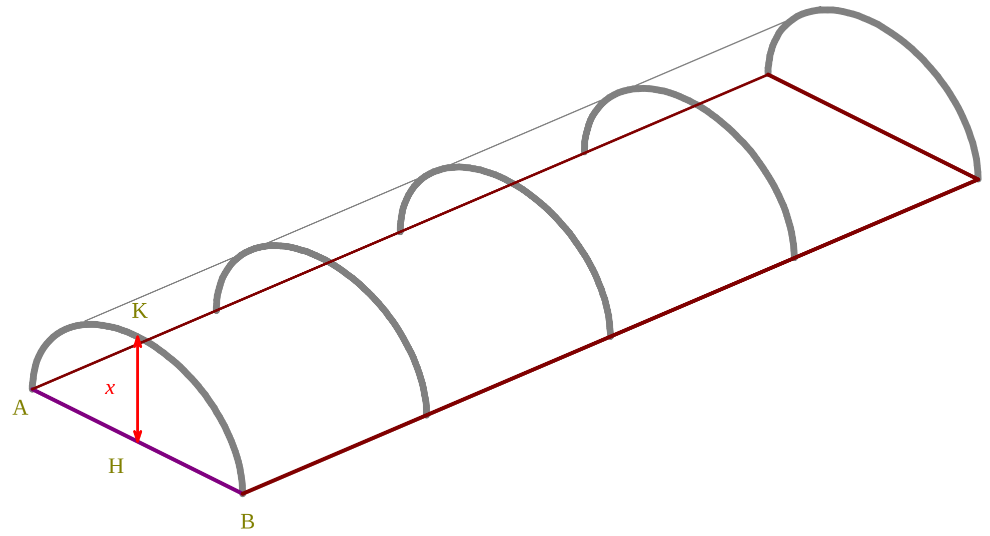
3°) Dans cette question, on se propose de déterminer la valeur exacte de x_0.

Former une équation dont x_0 est la solution puis résoudre cette équation au moyen du changement d'inconnue $X=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On donnera x_0 sous la forme d'un quotient sans racine carrée au dénominateur.

III. (6 points)

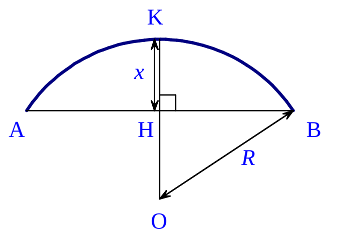
Un agriculteur veut fabriquer une serre pour protéger ses cultures.
La bâche transparente est soutenue par des arceaux en acier ayant la forme de petits arcs de cercles.



On précise les longueurs suivantes données en centimètres :
$\text{AB}=400$;
$\text{HK}=x$ où H et K désignent respectivement le milieu du segment [AB] et le milieu de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$.

x vérifie $0<x\leqslant 200$.

Le rayon de cintrage en centimètres est noté R. Ainsi $R=\text{OB}=\text{OK}=\text{OA}$.



1°) Démontrer que l'on a $R=\dfrac{20000}{x}+\dfrac{x}{2}$.

2°) Déterminer la valeur exacte de x telle que l'on ait $R=2x$.

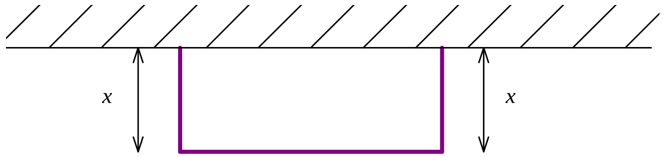
3°) Déterminer la valeur de x telle que l'on ait $R=205$.

4°) Dans cette question, on prend $x=100$.

Calculer la longueur en centimètres de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ (valeur arrondie au centième).
On donnera le résultat directement sans justifier.

IV. (4 points)

Pierre désire entourer sur son terrain une zone rectangulaire adossée à un mur sur trois côtés.
Il possède 50 mètres de grillage. Il se demande quelle est l'aire maximale qu'il peut ainsi enclore.
On précise qu'il veut utiliser la totalité du grillage qu'il possède.



1°) On note x la longueur en mètres des côtés perpendiculaires au mur ($0 \leqslant x \leqslant 25$).
Exprimer en fonction de x l'aire $\mathscr{A}$ du terrain en m^2 (on donnera une expression développée).
2°) Former le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto -2x^2 + 50x$ sur l'intervalle $\left[0\,;25\right]$.
Justifier brièvement par une phrase et un calcul.
3°) En déduire pour quelle valeur de x l'aire $\mathscr{A}$ est maximale et donner la valeur de l'aire maximale.

V. (6 points)

Soit ABCD un parallélogramme. On note E le point tel que $\overrightarrow{\text{BE}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BD}}$ et F le symétrique de D par rapport à C.
Aucune figure n'est demandée.

1°) Exprimer $\overrightarrow{\text{AE}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$.
Exprimer $\overrightarrow{\text{AF}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$.
On développera les calculs nécessaires pour répondre à la question.
2°) Démontrer que les points A, E, F sont alignés.

VI. (8 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points A(2 ; 4), $\text{B}\left(-1\,;5\right)$ et $\text{C}\left(-\frac{9}{2}\,;2\right)$.

On ne demande pas de faire de graphique.
Les 4 questions sont indépendantes.

1°) Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
2°) Soit Δ la droite d'équation cartésienne $6x - 7y + 13 = 0$.
a) Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur de Δ. On donnera des coordonnées entières.
b) Démontrer que la droite Δ est parallèle à un côté du triangle ABC.
3°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) en utilisant la colinéarité (seule cette méthode sera prise en compte).
4°) Dans cette question, on se place maintenant dans le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ du plan.
Donner les coordonnées dans ce repère du point D défini à la question 1°) et du point E défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{AE}} = 2\overrightarrow{\text{CA}} - \overrightarrow{\text{BA}}$ en justifiant chaque fois par une égalité vectorielle (sans faire de calculs de coordonnées).

$1^{\text{ère}}$ S1

Nom : ……………………

Prénom : …………………

Contrôle du 24 novembre 2014
Copie à rendre

I	II	III	IV	V	VI	Total/40	Total/20

I. (8 points)

Question	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	**Total**
Réponse									

II. (8 points)

Partie 1

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°)

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	‖
$-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	‖
$f(x)$	‖

3°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Partie 2

1°) $x_0 \approx$ ……………………… (valeur arrondie au centième) $\qquad$ $y_0 \approx$ ………………………(valeur arrondie au centième)

2°)

- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur …………………………… .
- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}'$ sur …………………………… .
- $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécantes au point $\text{A}(x_0\,;\,y_0)$.

3°) x_0 vérifie l'équation ……………………………………………………………………………… .

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

III. (6 points)

1°) ………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) ………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3°) ………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4°) $\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right) \approx$ ……………………… (valeur arrondie au centième)

IV. (4 points)

1°) ………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) ………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

x	0 25
$f(x)$	

Calcul justificatif :

3°) $\mathscr{A}$ est maximale pour $x =$ ……………… et la valeur maximale est égale à ……………………… .

V. (6 points)

1°) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

2°) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

VI. (8 points)

1°) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

2°) a) Le vecteur $\vec{u}$(………..;………..) est un vecteur directeur de Δ.

b) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

3°) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

4°) Le point D a pour coordonnées (………..;………..) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ car ……………………………

……………………………………………

Le point E a pour coordonnées (………..;………..) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ car ……………………………

……………………………………………

Instructions données à l’oral

Les élèves gardent impérativement le sujet à la fin de l’épreuve.

L’énoncé comporte 6 exercices.

Les élèves doivent écrire au stylo à plume ou encre effaçable.

Ne rien écrire sur le sujet.

Corrigé du contrôle du 24-11-2014

I.

Question	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Réponse	b	b	c	a	c	a	b	a

1°) *Réponse b*

On résout l'inéquation $1-2\sqrt{x}>0$

On la résout dans $\mathbb{R}^+$.

Dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation est successivement équivalente à :

$$\sqrt{x}<\frac{1}{2}$$
$$x<\frac{1}{4}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{\left[0\,;\frac{1}{4}\right[}$.

2°) *Réponse b*

Au départ, $a=2$ et $b=3$.

On va suivre pas à pas l'évolution des variables au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme.

$a-b=2-3=-1$ $\quad a$ prend la valeur -1

$-a^2+b=-(-1)^2+3=-1+3=2$ $\quad b$ prend la valeur 2

Les nombres affichés en sortie sont, dans l'ordre, $\boxed{-1 \text{ et } 2}$.

3°) *Réponse c*

L'équation $x^2+x-m=0$ est une équation du second degré.

On calculer son discriminant.

$\Delta=1-4\times(-m)=1+4m$

$\Delta>0$ si et seulement si $\boxed{m>-\frac{1}{4}}$.

4°) *Réponse a*

Si $x\leqslant 0$ alors $f(x)=2x$.

Si $x>0$, $f(x)=0$.

En prenant par exemple $x=2$, on obtient en sortie $f(x)=4=2+|\,2\,|$.

En prenant par exemple $x=-2$, on obtient en sortie $f(-2)=0=-2+|-2\,|$.

La seule fonction proposée qui convient est la fonction définie par $\boxed{f(x)=x+|\,x\,|}$.

Autre méthode plus satisfaisante :

On considère la fonction g définie par $g(x)=x+|\,x\,|$.

On vérifier aisément que :

$\forall x\in\mathbb{R}^+\quad g(x)=2x$

$\forall x\in\mathbb{R}^*_-\quad g(x)=0$

5°) *Réponse a*

L'inéquation $|\,3x+1\,|\leqslant 1$ est successivement équivalente à :

$$-1\leqslant 3x+1\leqslant 1$$
$$-2\leqslant 3x\leqslant 0$$
$$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{0}{3}$$
$$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 0$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{\left[-\frac{2}{3}\,;0\right]}$.

6°) *Réponse a*

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \begin{aligned} \mathrm{A}(x)&=3|-x\,|+2|-2x\,|-|\,x\,|\\ &=3\times|-x\,|+2\times|-2\,|\times|\,x\,|-|\,x\,|\\ &=3\times|\,x\,|+4\times|\,x\,|-|\,x\,|\\ &=6|\,x\,|\end{aligned}$$

7°) *Réponse a*

L'inéquation $x+1 \geqslant \dfrac{2}{x}$ est successivement équivalente à :

$$x+1-\frac{2}{x} \geqslant 0$$

$$\frac{x^2+x-2}{2} \geqslant 0$$

On commence par considérer le polynôme du second degré x^2+x-2.

$$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-2) = 1+8 = 9$$

$\Delta > 0$ donc ce trinôme admet deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = 1$.

On peut aussi dire que 1 est racine évidente du polynôme.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+x-2}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{[-2\,;0[\,\cup\,[1\,;+\infty[}$.

8°) *Réponse c*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2x^2-2x+1 = 2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right] = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

Le programme sur le second degré aidait grandement.

II.

Partie 1

1°)

On sait que $\mathscr{C}$ passe par les points A(1 ; 0) et B$\left(4\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(4) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Ces deux conditions se traduisent par le système $\begin{cases} a+\dfrac{b}{\sqrt{1}} = 0 \\ a+\dfrac{b}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Ce système est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+\dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-b \\ -\dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2°)

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\Vert$	$\searrow$
$-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\Vert$	$\nearrow$
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$

On utilise les règles du cours pour les variations des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On peut vérifier chaque sens de variation à l'aide de la calculatrice (vérification « pas à pas »).

Mettre le 0 (minimum de la fonction « racine carrée ») et le signe +.

On doit mettre le 0 et le + sur la ligne correspondant à $\sqrt{x}$.

3°) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
f\left(3+2\sqrt{2}\right) &= f\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right)\\
&= 1-\frac{1}{\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}\\
&= 1-\frac{1}{\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}\\
&= 1-\frac{1}{\left|1+\sqrt{2}\right|}\\
&= 1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\\
&= \frac{\cancel{1}+\sqrt{2}-\cancel{1}}{1+\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{1-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{-1}\\
&= \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\\
&= 2-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Partie 2

1°) $x_0 \approx 2,62$ (valeur arrondie au centième) et $y_0 \approx 0,38$ (valeur arrondie au centième)

> On utilise la fonctionnalité de la calculatrice permettant de déterminer les coordonnées d'un point d'intersection de deux courbes.

2°)

- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $\left]x_0 \,;+\infty\right[$.
- $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}'$ sur $\left]0 \,; x_0\right[$.
- $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécantes au point $\mathrm{A}\left(x_0 \,; y_0\right)$.

3°) x_0 est la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ (1).

(1) s'écrit aussi : $1-\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x}$ $(1')$.

On pose $X = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

L'équation $(1')$ s'écrit alors $1-X = X^2$ (2).

Cette dernière équation est équivalente à $X^2+X-1=0$.

Il s'agit d'une équation du second degré.

Calculons son discriminant.

$\Delta = 1^2-4\times1\times(-1) = 1+4 = 5$

$\Delta > 0$ donc l'équation (2) a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Or $X = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc l'équation (1) est équivalente à :

$\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ (impossible car $\sqrt{x} > 0$)

$\sqrt{x} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

$x = \dfrac{4}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$

$x = \dfrac{4}{6-2\sqrt{5}}$

$x = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

$$x=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}$$

$$x=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}$$

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Conclusion : $x_0=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

III.

> Il s'agit d'un problème concret (modélisation mathématique et résolutions d'équations du second degré).

1°)

$\mathrm{H}\in[\mathrm{OK}]$ donc $\mathrm{OH}=\mathrm{OK}-\mathrm{HK}=R-x$.

H est le milieu de $[\mathrm{AB}]$ donc $\mathrm{HB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=200$.

Dans le triangle OHB rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a : $\mathrm{OB}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{HB}^2$.

Cette égalité donne successivement :

$$R^2=(R-x)^2+200^2$$
$$R^2=R^2-2Rx+x^2+40000$$
$$2Rx=x^2+40000$$
$$R=\frac{x^2+40000}{2x}$$
$$R=\frac{x}{2}+\frac{20000}{x}$$

On a pu écrire la 4^e ligne car $x\neq 0$.

> L'énoncé aurait très bien pu demander de démontrer que $R=\dfrac{x^2+40000}{2x}$.
>
> La forme $R=\dfrac{x}{2}+\dfrac{20000}{x}$ n'était pas spécialement utile.

2°)

> Les questions 2°) et 3°) ont été très mal rédigées dans l'ensemble.
> Peut-être aurait-il fallu donner dans l'énoncé des indications de rédaction.

On cherche $x\in\,]0\,;200]$ tel que $R=2x$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{x}{2}+\frac{20000}{x}=2x$$
$$\frac{20000}{x}=\frac{3x}{2}$$
$$40000=3x^2$$
$$x^2=\frac{40000}{3}$$
$$x=\sqrt{\frac{40000}{3}} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{\frac{40000}{3}} \quad (\text{impossible car } x>0)$$
$$x=\frac{200}{\sqrt{3}}$$

Or $\dfrac{200}{\sqrt{3}}\in\,]0\,;200]$.

Donc la valeur de x cherchée est $\dfrac{200}{\sqrt{3}}$.

3°)

On cherche $x\in\,]0\,;200]$ tel que $R=205$ (2).

$$\frac{x}{2}+\frac{20000}{x}=205$$

$$x^2+40000-410x=0$$

$$x^2-410x+40000=0$$

Il s'agit d'une équation du second degré.

On calcule son discriminant ; on trouve deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: 160 et 250 (on peut utiliser le programme de la calculatrices).

Or $0<x\leqslant 200$ donc $x=160$.

4°)

On commence par calculer R en utilisant la formule établie à la question 1°).

$$\begin{aligned} R &= \frac{20000}{100}+\frac{100}{2} \\ &= 200+50 \\ &= 250 \end{aligned}$$

On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{AOH}}$.

Dans le triangle AOH rectangle en O, on a : $\sin\alpha = \dfrac{\text{AH}}{\text{AO}}$.

Donc $\sin\alpha = \dfrac{200}{250} = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$. Par suite, $\alpha = \text{Arcsin } 0{,}8$.

Le triangle AOB est isocèle en O et H est le milieu de [AB] donc $\widehat{\text{AOH}} = 2\alpha$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{long}\left(\overset{\frown}{\text{AB}}\right) &= 250\times 2\alpha \\ &= 500\times \text{Arcsin } 0{,}8 \\ &= 463{,}64760... \end{aligned}$$

$\text{long}\left(\overset{\frown}{\text{AB}}\right) \approx 463{,}65$ cm (valeur arrondie au centième).

IV.

Il s'agit d'un « problème concret » (modélisation mathématique et optimisation).

1°) Notons y la dimension en mètres du terrain parallèle au mur.

On a : $2x+y=50$ donc $y=50-2x$.

On en déduit que $\mathscr{A} = xy = x(50-2x) = -2x^2+50x$.

2°) f est une fonction polynôme du second degré.

Le coefficient devant x^2 est strictement négatif.

On calcule $-\dfrac{50}{2\times(-2)} = \dfrac{25}{2}$ (valeur charnière de x) et $f\left(\dfrac{25}{2}\right) = \dfrac{625}{2}$.

$-2<0$

x	0		$\frac{25}{2}$		25
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{625}{2}$	$\searrow$	0

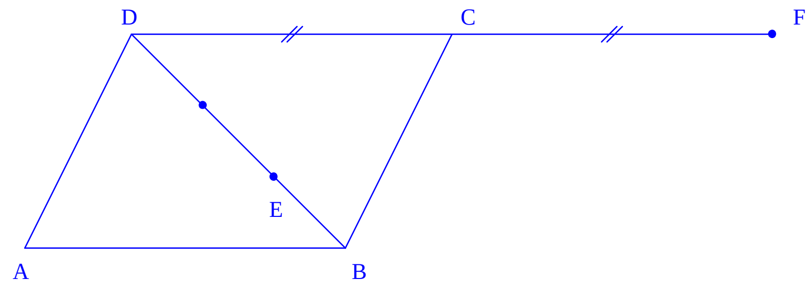
3°) D'après la question 2°), l'aire du terrain est maximale pour $x=12{,}5$ et l'aire maximale est $312{,}5$ m^2.

V.

ABCD parallélogramme

$\overrightarrow{\text{BE}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{BD}}$

$\text{F} = S_C(\text{D})$



1°)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AE}} &= \overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{BE}} \\ &= \overrightarrow{\text{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BD}} \\ &= \overrightarrow{\text{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{AD}}+\overrightarrow{\text{DF}}$

On sait par hypothèse que F est le symétrique de D par rapport à C donc C est le milieu de [DF] d'où $\overrightarrow{\text{DF}} = 2\overrightarrow{\text{DC}}$.
De plus, ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{\text{DC}} = \overrightarrow{\text{AB}}$.

En remplaçant, on obtient $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{AD}}+2\overrightarrow{\text{AB}}$ ou $\overrightarrow{\text{AF}} = 2\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{AD}}$.
2°) Grâce aux résultats de la question 1°), on remarque que $\overrightarrow{\text{AF}} = 3\overrightarrow{\text{AE}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{AF}}$ sont donc colinéaires et comme ils ont un point commun, on en déduit que les points A, E et F sont alignés.

VI.

1°)

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (1).

Autre rédaction possible :

Pour que ABCD un parallélogramme, il faut et il suffit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(1) se traduit en coordonnées $\begin{cases} -3 = -\dfrac{9}{2} - x_D \\ 1 = 2 - y_D \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} x_D = -\dfrac{3}{2} \\ y_D = 1 \end{cases}$.

D a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}\,;1\right)$.

2°) $\Delta : \ 6x - 7y + 13 = 0$

a) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(7\,;6)$.

b) $\overrightarrow{BC}\left(-\dfrac{7}{2}\,;-3\right)$

$\det\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{BC}\right) = x_{\vec{u}} \times y_{\overrightarrow{BC}} - y_{\vec{u}} \times x_{\overrightarrow{BC}} = 7 \times (-3) - 6 \times \left(-\dfrac{7}{2}\right) = -21 + 21 = 0$

On en déduit que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Ainsi la droite Δ est parallèle à [BC].

3°)

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$M \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}\right) = 0$

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ y-4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $(x-2) \times 1 - (y-4) \times (-3) = 0$

si et seulement si $(x-2) \times 1 + 3(y-4) = 0$

si et seulement si $x + 3y - 14 = 0$

(AB) a pour équation cartésienne $x + 3y - 14 = 0$.

4°)

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Par suite, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Ainsi dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, D a pour coordonnées $(-1\,;1)$.

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

Ainsi dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, E a pour coordonnées $(1\,;-2)$.

Trouvé dans quelques copies d'élèves :

Félix Vuillaume :

$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Or $\overrightarrow{AC}$ définit l'axe des ordonnées et $\overrightarrow{AB}$ définit l'axe des abscisses.

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

Et on assimile encore $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ aux axes du repère.

Ludivine Issenmann :

$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ soit $\begin{cases} x_D - x_A = x_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_D - y_A = y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

Victor Pearce :

… car il répond à l'égalité $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AB}$ axe des abscisses et $\overrightarrow{AC}$ axe des ordonnées.

Et on assimile encore $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ aux axes du repère.