TS1

Contrôle du samedi 27 septembre 2014 (2 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : …….. / 20**

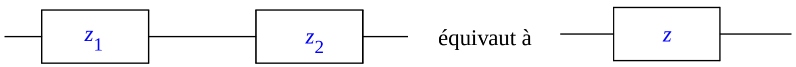
• La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

• Il est demandé d'encadrer en rouge à la règle tous les résultats demandés.

I. (2 points)

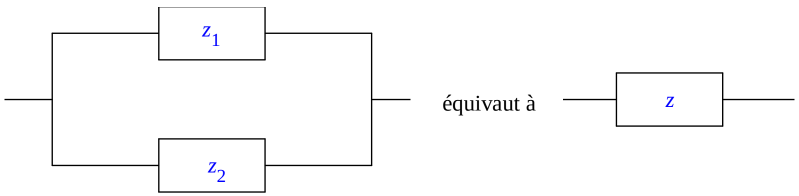
Dans un circuit électronique, on associe à chaque composant un nombre complexe qui représente son impédance. Une bobine a une impédance imaginaire pure de la forme iy où y est un réel strictement positif et un condensateur une impédance imaginaire pure de la forme iy où y est un réel strictement négatif.
Une impédance réelle correspond à une résistance ordinaire.

Dans un montage en série :



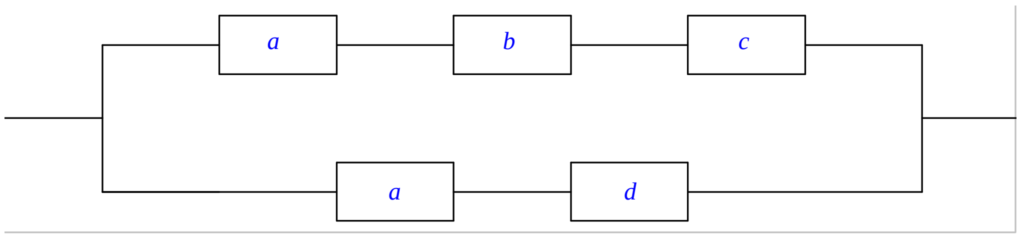
où $z = z_1 + z_2$.

Dans un montage en parallèle :



où $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$.

Calculer l'impédance équivalente z du montage suivant où $a = 3$, $b = 10\text{i}$, $c = -2\text{i}$, $d = 2 - \text{i}$.
Aucun détail des calculs n'est demandé sur la copie.



$z =$ ………………………

II. (4 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs des équations suivantes d'inconnue complexe z.
Aucun détail de la résolution n'est demandé sur la copie.

$$2z + \text{i} = \overline{z} + 1 \quad (1) \qquad ; \qquad z^2 = \text{i}\overline{z} \quad (2)$$

$S_1 =$ ……………………………………	$S_2 =$ ……………………………………

III. (6 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note A le point d'affixe -1 et l'on pose $P^* = P \setminus \{\text{A}\}$.

À tout point M de P^* d'affixe $z \neq -1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\text{i}z}{z+1}$.

1°) On pose $z = x + \text{i}y$ avec $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1\,;0)\}$.
Déterminer l'écriture algébrique de z'.
On effectuera le calcul avec le plus grand soin et l'on tâchera d'être le plus concis possible (donner les principales étapes du calcul, en 4 lignes maximum).

2°) Déterminer l'ensemble E des points M de P^* tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.
On rédigera soigneusement en adoptant le modèle ci-dessous :

Soit M un point de P^* d'affixe $z \neq -1$.
$\text{M} \in E \Leftrightarrow \text{M}' \in (\text{O}x)$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$

IV. (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

1°) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, de l'indice 0 à l'indice n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel sans justifier la réponse.

Algorithme 1

```
Saisir n
U prend la valeur 1/2
Pour i allant de 1 à n Faire
    U prend la valeur 3U/(1+2U)
FinPour
Afficher U
```

Algorithme 2

```
Saisir n
U prend la valeur 1/2
Pour i allant de 1 à n Faire
    U prend la valeur 1/2
    Afficher U
    U prend la valeur 3U/(1+2U)
FinPour
```

Algorithme 3

```
Saisir n
U prend la valeur 1/2
Pour i allant de 1 à n Faire
    Afficher U
    U prend la valeur 3U/(1+2U)
FinPour
Afficher U
```

2°) On admet que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

V. (2 points)

Rencontrant un mendiant, un homme lui donne une pièce ; il en rencontre un deuxième, et lui donne deux pièces. Il rencontre d'autres mendiants encore, à qui il donne une pièce de plus que précédemment, à chaque fois… jusqu'à ce qu'il n'ait plus rien en poche. Il réfléchit alors, et se dit : « Si j'avais donné autant de pièces à chacun d'entre eux, cela aurait été plus équitable, et chaque mendiant aurait reçu 8 pièces ».
Combien l'homme a-t-il rencontré de mendiants ?

Corrigé du contrôle du 27-9-2014

I.

$$z=\frac{443+135\mathrm{i}}{113}$$

II.

Déterminer les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs des équations suivantes d'inconnue complexe z.
Aucun détail de la résolution n'est demandé sur la copie.

$$2z+\mathrm{i}=\overline{z}+1 \quad (1) \qquad ; \qquad z^2=\mathrm{i}\overline{z} \quad (2)$$

$S_1=\left\{1-\frac{\mathrm{i}}{3}\right\}$	$S_2=\left\{0\,;-\mathrm{i}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right\}$

• $2z+\mathrm{i}=\overline{z}+1 \quad (1)$

On pose $z=x+\mathrm{i}y \quad \left((x\,;y)\in\mathbb{R}^2\right)$.
On a alors : $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}=(x-\mathrm{i}y)+1\\
&\Leftrightarrow 2x+2\mathrm{i}y+\mathrm{i}=(x+1)-\mathrm{i}y\\
&\Leftrightarrow 2x+\mathrm{i}(2y+1)=(x+1)-\mathrm{i}y\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2x=x+1\\ 2y+1=-y\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-\frac{1}{3}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow z=1-\frac{\mathrm{i}}{3}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\left\{1-\frac{\mathrm{i}}{3}\right\}$.

• $z^2=\mathrm{i}\overline{z} \quad (2)$

On pose $z=x+\mathrm{i}y \quad \left((x\,;y)\in\mathbb{R}^2\right)$.
On a alors : $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow x^2-y^2+2\mathrm{i}xy=\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)\\
&\Leftrightarrow x^2-y^2+2\mathrm{i}xy=y+\mathrm{i}x\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=y\\ 2xy=x\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=y\\ x(2y-1)=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=y\\ x=0 \quad \text{ou} \quad y=\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

1^er^ cas : $x=0$

On a alors $y^2=-y$.

On obtient $y=0$ ou $y=-1$.

2^e^ cas : $y=\frac{1}{2}$

On a alors : $x^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ soit $x^2=\frac{3}{4}$ d'où $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=\left\{0\,;-\mathrm{i}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right\}$.

III. (6 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note A le point d'affixe -1 et l'on pose $P^*=P\setminus\{\mathrm{A}\}$.

À tout point M de P^* d'affixe $z\neq-1$, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{\mathrm{i}z}{z+1}$.

1°) On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(-1\,;0)\}$.
Déterminer l'écriture algébrique de z'.
On effectuera le calcul avec le plus grand soin et l'on tâchera d'être le plus concis possible (donner les principales étapes du calcul, en 4 lignes maximum).
2°) Déterminer l'ensemble E des points M de P^* tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.

On rédigera soigneusement en adoptant le modèle ci-dessous :

Soit M un point de P^* d'affixe $z \neq -1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow \mathrm{M}' \in (\mathrm{O}x) \\ &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

1°) $z = x + \mathrm{i}y \qquad (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1\,;\,0)\}$.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\mathrm{i}z}{z+1} \\ &= \frac{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}{x+\mathrm{i}y+1} \\ &= \frac{\mathrm{i}x - y}{(x+1)+\mathrm{i}y} \\ &= \frac{(\mathrm{i}x-y)\left[(x+1)-\mathrm{i}y\right]}{\left[(x+1)+\mathrm{i}y\right]\left[(x+1)-\mathrm{i}y\right]} \\ &= \frac{\mathrm{i}x(x+1)+xy-y(x+1)+\mathrm{i}y^2}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{-y+\mathrm{i}\left(x^2+y^2+x\right)}{(x+1)^2+y^2} \end{aligned}$$

2°) **Déterminons l'ensemble $E = \{\mathrm{M}(z) \in P \,/\, Z \in \mathbb{R}\}$.**

Soit M un point de P^* d'affixe $z \neq -1$.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1\,;\,0)\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow \mathrm{M}' \in (\mathrm{O}x) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} z' = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \qquad \text{(on met } x^2+x \text{ sous forme canonique)} \end{aligned}$$

La conclusion peut se formuler de deux façons :

E est le cercle de centre Ω de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point A.

ou

$E = \mathscr{C} \setminus \{\mathrm{A}\}$ avec $\mathscr{C}$: cercle de centre Ω de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

On observe que le point A appartient au cercle $\mathscr{C}$ car ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{C}$.
Donc il faut priver $\mathscr{C}$ du point A.

IV. (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}.$$

1°) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, de l'indice 0 à l'indice n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel sans justifier la réponse.

Algorithme 1

Saisir n
U prend la valeur $\frac{1}{2}$
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  U prend la valeur $\frac{3U}{1+2U}$
FinPour
Afficher U

Algorithme 2

Saisir n
U prend la valeur $\frac{1}{2}$
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  U prend la valeur $\frac{1}{2}$
  Afficher U
  U prend la valeur $\frac{3U}{1+2U}$
FinPour

Algorithme 3

Saisir n
U prend la valeur $\frac{1}{2}$
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  Afficher U
  U prend la valeur $\frac{3U}{1+2U}$
FinPour
Afficher U

L'algorithme qui répond à la question est le 3.

2°) On admet que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

On utilise la méthode par différence.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n$$
$$= \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$$

$1 - u_n > 0$ (car $u_n < 1$)

$2u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$ (car $u_n > 0$)

Donc $\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

On pourrait aussi utiliser la méthode par quotient (mais il faut bien justifier que la méthode est applicable car tous les termes sont strictement positifs).

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$$
$$= \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}}$$
$$= \frac{3u_n}{1+2u_n-3u_n}$$
$$= \frac{3u_n}{1-u_n}$$
$$= 3\frac{u_n}{1-u_n}$$
$$= 3v_n$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3^n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

V. (2 points)

Rencontrant un mendiant, un homme lui donne une pièce ; il en rencontre un deuxième, et lui donne deux pièces. Il rencontre d'autres mendiants encore, à qui il donne une pièce de plus que précédemment, à chaque fois… jusqu'à ce qu'il n'ait plus rien en poche. Il réfléchit alors, et se dit : « Si j'avais donné autant de pièces à chacun d'entre eux, cela aurait été plus équitable, et chaque mendiant aurait reçu 8 pièces ».
Combien l'homme a-t-il rencontré de mendiants ?

Soit n le nombre de mendiants rencontrés $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

D'après l'énoncé, on a : $1+2+...+n = 8n \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 8n$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) = 16n$$

$$\Leftrightarrow n(n+1-16) = 0$$

$$\Leftrightarrow n(n-15) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \text{ (impossible car } n \in \mathbb{N}^*\text{) ou } \quad n = 15$$

L'homme a rencontré 15 mendiants.

On peut vérifier qu'il a distribué 120 pièces au total.

Autre solution :

On définit deux suites que l'on rentre dans la calculatrice.
Cette méthode est moins satisfaisante car l'on n'est pas sûr que 15 soit la seule valeur.

Le problème énoncé est le suivant : Un homme donne à un premier mendiant une pièce, il croise un second mendiant à qui il donne deux pièces, il en croise un troisième à qui il donne trois pièces… Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'ait plus de pièces. L'homme réalise alors qu'il aurait pu donner huit pièces à chaque mendiant afin d'être équitable. On se demande alors combien l'homme a croisé de mendiants.

On reformule les deux options de l'homme :

- Donner 1 pièce au 1^{er} mendiant, donner 2 pièces au 2^e mendiant… donner n pièces au n-iéme mendiant. (1)

ou

- Donner 8 pièces n fois (donc à n mendiants) (2)

On traduit ensuite ces propositions sous forme de suites :

On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + n$

En effet, le nombre de pièces données par l'homme est défini par le nombre de pièces données précédemment + « le numéro » du mendiant en présence.

On introduit la suite (v_n) définie par son premier terme $v_1 = 8$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n + 8$

Ici, le nombre de pièces données par l'homme est défini par le nombre de pièces données précédemment + 8.

On rentre les suites définies par récurrence sur une calculatrice graphique :
$n\text{Min} = 1$
$u(n) = u(n-1) + n$
$u(n\text{Min}) = \{1\}$
$v(n) = v(n-1) + 8$
$v(n\text{Min}) = \{8\}$

On cherche à quelle valeur les suites se « recoupent ».
La visualisation graphique étant trop imprécise, on utilise le tableau de la calculatrice.
On trouve pour $n = 15$ que les deux suites ont pour image 120.

On en déduit donc que l'homme a croisé 15 mendiants car il aurait donné 120 pièces dans les deux cas.