TS1

Contrôle du mardi 14 octobre 2014 (50 minutes)

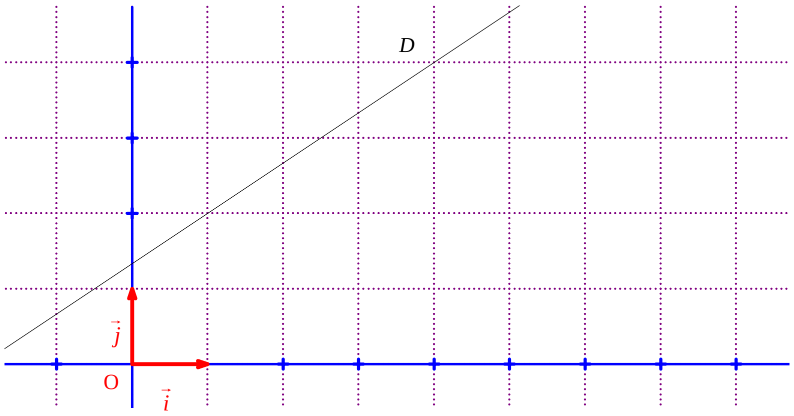
Prénom et nom : …………………………………………………………

Note : ……../ 20

I. (5 points : 1 point + 3 points + 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $3u_{n+1} = 2u_n + 4$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Sur le graphique ci-dessous, effectuer la construction des termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 (en faisant apparaître les traits de construction en pointillés).



2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n < 4$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

3°) Déterminer le sens de variation de (u_n) en utilisant le résultat du 2°). On attend une explication rapide.

………

………

………

………

II. (2 points)

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(8 \times 3^{2k}\right)$.

Donner une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

$S_n =$ …………………………………

III. (2 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

1°) Calculer S_3 « à la main » (donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

$S_3=$ ....

2°) Calculer S_{42} à l'aide de la calculatrice (valeur arrondie au centième).

$S_{42}\approx$ .... (valeur arrondie au centième)

IV. (4 points)

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x+1}$ et $g : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{4}$ définies sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passent toutes les deux par le point $\mathrm{A}(1\,;1)$. Justifier brièvement.

....

....

....

2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont la même tangente au point A. On tâchera de choisir la méthode la plus astucieuse.

....

....

....

....

....

....

....

V. (2 points)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto \frac{x^2+m}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Calculer $f_m'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Donner une étape de calcul et le résultat final.

$f_m'(x)=$ ....

$f_m'(x)=$ ....

VI. (2 points)

On considère les fonctions $u : x \mapsto 1-2x$ et $v : x \mapsto 1-x^2$ définies sur $\mathbb{R}$.

On note f la composée de u suivie de v et g la composée de v suivie de u (autrement dit : $f=v\circ u$ et $g=u\circ v$).

Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x (une seule expression à chaque fois).

Donner les expressions développées réduites sans détailler les calculs.

$f(x)=$ .... ; $g(x)=$ ....

VII. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{(3x-1)^3}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ (une seule expression à chaque fois).

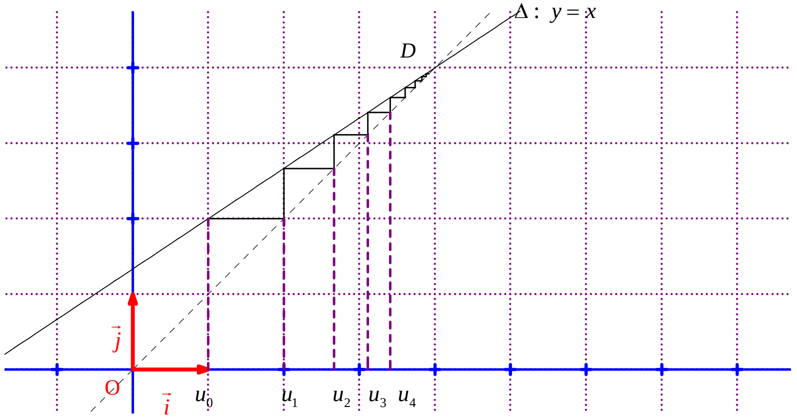
$f'(x)=$ .... ; $f''(x)=$ .... ; $f^{(3)}(x)=$ ....

Corrigé du contrôle du 14-10-2014

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $3u_{n+1} = 2u_n + 4$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Sur le graphique ci-dessous, effectuer la construction des termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 (en faisant apparaître les traits de construction en pointillés).



2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n < 4$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n < 4$ ».

Initialisation :

Vérifions que la phrase $P(0)$ est vraie.
On a $u_0 = 1$ par définition de la suite.
On a $u_0 < 4$.
D'où la phrase $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k < 4$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} < 4$.

On a : $u_k < 4$ par hypothèse de récurrence.
Donc $2u_k + 4 < 12$.
On a donc $3u_{k+1} < 12$.
D'où $u_{k+1} < 4$ et par suite, la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

3°) Déterminer le sens de variation de (u_n) en utilisant le résultat du 2°). On attend une explication rapide.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{4 - u_n}{3}$
Or d'après la question précédente, on a : $u_n < 4$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - u_n > 0$.
On en déduit que (u_n) est strictement croissante (à partir de l'indice 0).

II.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(8 \times 3^{2k}\right)$.

Donner une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

$$S_n = 8 \times \sum_{k=0}^{k=n} 3^{2k} = 8 \times \sum_{k=0}^{k=n} 9^k = 8 \times \frac{9^{n+1} - 1}{9 - 1} = 9^{n+1} - 1$$

III.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

1°) Calculer S_3 « à la main » (donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

$$S_3 = \frac{76}{105}$$

2°) Calculer S_{42} à l'aide de la calculatrice (valeur arrondie au centième).

$$S_{42} \approx 0,79 \text{ (valeur arrondie au centième)}$$

À l'aide de la calculatrice (modèle TI), on obtient l'affichage : 0,7912113313 .

Il n'existe pas de formule sommatoire pour S_n.

IV.

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ et $g : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ définies sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passent toutes les deux par le point $\text{A}(1\,;1)$. Justifier brièvement.

$f(1) = \sqrt{1^2 - 1 + 1} = 1$ et $g(1) = -\frac{1}{4} \times 1^2 + 1 + \frac{1}{4} = 1$

Donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passent toutes les deux par le point $\text{A}(1\,;1)$.

2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont la même tangente au point A. On tâchera de choisir la méthode la plus astucieuse.

On calcule les coefficients directeurs des tangentes en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

f n'est pas une fonction rationnelle.

$x^2 - x + 1 > 0$ pour tout réel x donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$f'(1) = \frac{2 \times 1 - 1}{2\sqrt{1 - 1 + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$g'(1) = -\frac{1}{2} \times 1 + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Donc $f'(1) = g'(1)$.

Les coefficients directeurs des tangentes en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont égaux donc les tangentes sont confondues.
On en déduit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont la même tangente au point A.

V.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto \frac{x^2 + m}{x - 1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Calculer $f_m'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donner une étape de calcul et le résultat final.

$$f_m'(x) = \frac{2x(x-1) - 1 \times \left(x^2 + m\right)}{(x-1)^2}$$

$$f_m'(x) = \frac{x^2 - 2x - m}{(x-1)^2}$$

VI.

On considère les fonctions $u : x \mapsto 1 - 2x$ et $v : x \mapsto 1 - x^2$ définies sur $\mathbb{R}$.

On note f la composée de u suivie de v et g la composée de v suivie de u (autrement dit : $f = v \circ u$ et $g = u \circ v$).

Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x (une seule expression à chaque fois).

Donner les expressions développées réduites sans détailler les calculs.

$$f(x) = 4x - 4x^2 \quad ; \quad g(x) = 2x^2 - 1$$

Il s'agit d'un calcul de composée et non d'une application de la formule de dérivation d'une composée.

$f(x) = v\left[u(x)\right]$	$g(x) = u\left[v(x)\right]$
$= 1 - (1 - 2x)^2$	$= 1 - 2\left(1 - x^2\right)$
$= 4x - 4x^2$	$= 2x^2 - 1$

VII.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{(3x-1)^3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ (une seule expression à chaque fois).

$$f'(x) = -\frac{18}{(3x-1)^4} \quad ; \quad f''(x) = \frac{216}{(3x-1)^5} \quad ; \quad f^{(3)}(x) = -\frac{3240}{(3x-1)^6}$$

Pour les exercices **V** et **VII**, l'application « Symbolic » ne marchait pas.